INTEGRALI PER SOSTITUZIONE 1

$$\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$$

Dobbiamo individuare la parte della funzione integranda che vogliamo sostituire. Per la scelta possiamo farci guidare dal fatto che ciò che ci dà fastidio è la presenza dell'integrale del radicale.

Proviamo a porre

$$t = \sqrt{5+x^2}$$

e calcoliamo il differenziale t : $dt = t'dt$

$$dt = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{5+x^2}}\cdot \cancel{2}x \cdot dx$$

(abbiamo prima utilizzato la derivata $D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$)

Ne discende che

$$dx = \frac{\sqrt{5+x^2}}{x}\,dt$$

Sostituendo nell'integrale avremo

$$\int \cancel{x}\sqrt{t}\,\frac{\sqrt{5+x^2}}{\cancel{x}}\,dt = \int \sqrt{t}\,\sqrt{5+x^2}\,dt =$$

$$= \int \sqrt{t}\cdot t\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}\,t\,dt = \int t^{2}\,dt =$$

$$= \frac{t^{3}}{3} + c = \frac{1}{3}\left(\sqrt{5+x^2}\right)^3 + c = \frac{1}{3}\sqrt{(5+x^2)^3} + c$$

Le possibilità di sostituzione non sono univoche.
Possiamo fare, ad esempio,

$$t = 5+x^2, \quad dt = 2x\,dx, \quad dx = \frac{dt}{2x}$$

per cui si ha

$$\int \cancel{x}\sqrt{t}\cdot\frac{dt}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{\cancel{2}}} + c =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{t^3} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(5+x^2)^3} + c$$