INTEGRALI FRATTI 1

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

Calcoliamo il Δ del denominatore

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4-20 < 0$$

Poiché il Δ è minore di zero non possiamo sperare di scomporre la funzione integranda in fratti semplici. Manipoliamo allora il denominatore in modo che appaia come la somma di due quadrati. Ricordando che

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Possiamo porre

$$x^2+2x+5 = x^2+2x+1+4 = (x+1)^2+4$$

Il nostro scopo è avvicinarci all'integrale

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + c$$

Quel 4 ci da fastidio e allora lo mettiamo in evidenza

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{1}{4} \frac{dx}{\frac{(x+1)^2}{4}+1} =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left[\frac{x+1}{2}\right]^2+1}$$

Per ricondurci all'integrale noto dobbiamo porre la sostituzione

$$t = \frac{x+1}{2}$$

$$dt = \frac{1}{2}dx$$

$$dx = 2\,dt$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{2\,dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,t + c = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{2} + c$$