INTEGRALI FRATTI 2

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 4}$$

calcoliamo il Δ ; $\Delta = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 4 - 48 < 0$
Non potendo scomporre la funzione integranda in fratti semplici, come nell'esercizio precedente, manipoliamo il denominatore in modo che appaia come la somma di due quadrati.
Dei termini li abbiamo: $3x^2$ che è il quadrato di $\sqrt{3}x$ e $2x$ che dovrebbe essere il doppio prodotto. Visto che

$$(kx + a)^2 = k^2x^2 + 2kax + a^2$$

si ha

$$2ka = 2 \qquad \text{con } k = \sqrt{3}$$

quindi

$$a = \frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Allora dovremmo avere il termine $a^2 = \frac{1}{3}$

$$3x^2 - 2x + 4 = 3x^2 - 2x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 4 =$$

$$= \left(3x^2 - 2x + \frac{1}{3}\right) + \frac{11}{4} = \left(\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{11}{4}$$

l'integrale diventa

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{11}{4}} = \frac{1}{\frac{11}{4}} \int \frac{dx}{\frac{\left(\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\frac{11}{4}} + 1} =$$

$$= \frac{4}{11}\int \frac{dx}{\left[\frac{2}{\sqrt{11}}\left(\sqrt{3}\,x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]^2 + 1}$$

Poniamo:

$$t = \cancel{\sqrt{3}}\ \frac{2}{\sqrt{11}}\left(\sqrt{3}\,x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$dt = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\,dx \quad ; \quad dx = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}\,dt$$

$$= \frac{4}{11}\int \frac{\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}\,dt}{t^2 + 1} = \frac{4}{11}\,\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{3}}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{11}\,\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\ t + k =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{11}\,\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\ \frac{2}{\sqrt{11}}\left(\sqrt{3}\,x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c$$