INTEGRALI FRATTI 4

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$$

Poiché il numeratore ha grado maggiore del denominatore procediamo anzitutto ad una divisione

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^5 & +x^4 & & & -8 & x^3-4x \\
\hline
x^5 & & -4x^3 & & & x^2+x+4 \\
\hline
// & x^4 & +4x^3 & & -8 & \\
 & x^4 & & -4x^2 & & \\
\hline
 & // & 4x^3 & +4x^2 & -8 & \\
 & & 4x^3 & & -16x & \\
\hline
 & & // & 4x^2 & +16x-8 &
\end{array}$$

Quindi

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$$

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx = \int x^2\,dx + \int x\,dx + 4\int dx + \int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\,dx$$

Per risolvere l'ultimo integrale dobbiamo provare a scomporre la funzione integranda in fratti semplici

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} = \frac{4x^2+16x-8}{x(x^2-4)} = \frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}$$

Possiamo dire che

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

dove A, B e C sono fattori che dobbiamo determinare. Supponiamo di conoscerli e calcoliamo il minimo comune multiplo

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{A(x^2-4) + B(x^2+2x) + C(x^2-2x)}{x(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{Ax^2 - 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 - 2Cx}{x(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + 2(B-C)x - 4A}{x(x-2)(x+2)}$$

Poiché questa frazione deve essere identica a quella di partenza, i due numeratori devono essere uguali

$$4x^2+16x-8 = (A+B+C)x^2 + 2(B-C)x - 4A$$

Per il principio di identità dei polinomi, devono essere uguali i coefficienti:

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ 2(B - C) = 16 \\ -4A = -8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 + B + C = 4 \\ B - C = 8 \\ A = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B + C = 2 \\ B - C = 8 \\ A = 2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \rightarrow 2B = 10 \\ \rightarrow 2C = -6 \end{matrix}$$

(sommando membro a membro le prime due equazioni)

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = 5 \\ C = -3 \end{cases}$$

quindi

$$\int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2}$$

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{5}{x-2}\,dx - \int \frac{3}{x+2}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\log|x| + 5\log|x-2| - 3\log|x+2| + c =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \log|x|^2 + \log|x-2|^5 + \log|x+2|^{-3} + c =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \cancel{\log|x|} + \log\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right| + c$$