INTEGRALI FRATTI 8

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$$

Il denominatore ha una radice reale $x=0$ e radici complesse e coniugate semplici per cui

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}$$

$$(A+B)x^2 + Cx + A = 1$$

Per il principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + c$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} \qquad \text{posto} \quad t = x^2+1 \qquad dt = 2x\,dx$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\log|t| = \frac{1}{2}\log|x^2+1| =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}}\log\sqrt{x^2+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx = \log|x| - \log\sqrt{x^2+1} + c =$$

$$= \log\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + c = \log\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} + c$$