INTEGRALE PER SOSTITUZIONE 8

$$\int \frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}\,dx$$

Per scegliere la sostituzione ci possiamo far guidare dal desiderio di far scomparire tutti i radicali nella funzione integranda. Se poniamo

$$t = 1+x$$

non otteniamo lo scopo,
né miglior fortuna ci dà

$$t = \sqrt[3]{1+x}$$

o

$$t = \sqrt{1+x}$$

Per poter eliminare tutti i radicali occorre considerare il minimo comune multiplo fra gli indici dei radicali presenti e pone

$$t = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$$

in tal caso avremo

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = \left[(1+x)^{\frac{1}{6}}\right]^2 = t^2$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \left[(1+x)^{\frac{1}{6}}\right]^3 = t^3$$

Dunque è la sostituzione che consente di eliminare tutti i radicali. Dobbiamo soltanto verificare che non ci siano problemi col differenziale

$$t = \sqrt[6]{1+x} \Rightarrow t^6 - 1 = x$$

$$dx = 6t^5\,dt$$

Operando la sostituzione si ha

$$\int \frac{1-t^2}{t^3+t^2}\cdot 6t^5\,dt =$$

$$= 6\int \frac{(1-t)\cancel{(1+t)}}{\cancel{t^2}\cancel{(t+1)}}\, t^{\cancel{5}\,3}\,dt =$$

$$= 6\int (t^3 - t^4)\,dt =$$

$$= 6\int t^3\,dt - 6\int t^4\,dt =$$

$$= \cancel{6}^{\,3}\,\frac{t^4}{\cancel{4}_{\,2}} - 6\,\frac{t^5}{5} + c =$$

$$= \frac{3}{2}t^4 - \frac{6}{5}t^5 + c =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[6]{(1+x)^4} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{(1+x)^5} + c$$