

Analisi dei sistemi lineari discreti nel dominio del tempo

Sia dato un sistema lineare discreto nelle seguente forme implicite

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k)$$

Vogliamo passare, adesso, dalle forme implicite alle forme esplicite

$$x(k) = \varphi(k, k_0, x_0, u[k_0, k])$$

$$y(k) = \eta(k, x(k), u(k)) = C(k)x(k) + D(k)u(k)$$

Vogliamo cioè determinare l'evoluzione nello stato $x(k)$ e nelle uscite $y(k)$ nell'intervallo $[k_0, k_f]$ assegnato uno stato iniziale $x_0 = x(k_0)$ ed un ingresso $u(k)$, $k \in [k_0, k_f]$. Vedremo, allora, come si opera.

Ricordiamo che il nostro sistema è lineare, per cui la risposta nello stato $x(k)$ e nell'uscita $y(k)$ a partire dallo stato x_0 e sotto l'azione dell'ingresso u , che si può decomporre in una evoluzione libera ed una evoluzione forzata e precisamente

$$x(k) = x_e(k) + x_f(k)$$

$$y(k) = y_e(k) + y_f(k)$$

I SISTEMI A STATO VETTORE

Per quanto riguarda lo stato posso scrivere

$$\varphi(k, k_0, x_0, u) = \varphi(k, k_0, x_0 + 0, u + 0) =$$

$$= \varphi(k, k_0, x_0, 0) + \varphi(k, k_0, 0, u)$$

dove $\varphi(k, k_0, x_0, 0)$ è la risposta a partire dallo stato x_0 e con ingresso nullo e prende il nome di RISPOSTA LIBERA e $\varphi(k, k_0, 0, u)$ è la risposta a partire dallo stato zero sotto l'azione dell'ingresso che prende il nome di RISPOSTA FORZATA.

RISPOSTA LIBERA NELLO STATO

Dobbiamo, allora, determinare le risposte con le condizioni iniziali $x(k_0) = x_0$ e $u(k) = 0$. Dovremo, allora, risolvere

$$x(k+1) = A(k)x(k)$$

Per ricorrenza otteniamo

$$x(k_0+1) = A(k_0)x(k_0)$$

$$x(k_0+2) = A(k_0+1)x(k_0+1) = A(k_0+1)A(k_0)x_0$$

$$\vdots$$

$$x(k) = A(k-1)A(k-2) \dots A(k_0)x_0$$

Quindi, ponendo

$$\Phi(k, k_0) = A(k-1)A(k-2) \dots A(k_0)$$

potremmo scrivere

$$x(k) = \Phi(k, k_0)x_0$$

dove $\Phi(k, k_0)$ è una matrice che viene chiamata matrice di transizione, legata alle matrici dinamiche secondo le relazioni date. Osservo che se prendo $h \in [k_0, k]$ posso scrivere che

$$\Phi(k, k_0) = \Phi(k, h) \Phi(h, k_0)$$

Infatti

$$\Phi(k, h) = A(k-1) A(k-2) \dots A(h)$$

$$\Phi(h, k_0) = A(h-1) A(h-2) \dots A(k_0)$$

Se il sistema è invertibile, cioè se $A(k)$ è invertibile qualsiasi k , allora la matrice di transizione si può definire anche per $k < k_0$ come segue

$$\Phi(k, k_0) = A^{-1}(k) A^{-1}(k+1) \dots A^{-1}(k_0-1) \cancel{A^{-1}(k)}$$

Infatti

$$x(k+1) = A(k) x(k)$$

da cui

$$x(k_0) = A(k_0-1) x(k_0-1)$$

$$\Downarrow$$

$$x(k_0-1) = A^{-1}(k_0-1) x(k_0)$$

$$x(k_0-1) = A(k_0-2) x(k_0-2)$$

$$\Downarrow$$

$$x(k_0-2) = A^{-1}(k_0-2) x(k_0-1) =$$

$$= A^{-1}(k_0-2) A^{-1}(k_0-1) x(k_0)$$

In generale

$$x(k) = A^{-1}(k) A^{-1}(k+1) \dots A^{-1}(k_0-1) x(k_0)$$

$$= \Phi(k, k_0) x(k_0)$$

Si può osservare che tra le due matrici di transizione definite per $k > k_0$ e $k < k_0$ esiste la seguente relazione

$$\Phi(k, k_0) = \Phi^{-1}(k_0, k)$$

Questo si dimostra ricordando la seguente proprietà delle matrici

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Nel nostro caso avremo allora

$$\Phi^{-1}(k, k_0) = (A(k-1)A(k-2) \dots A(k_0))^{-1} =$$

$$= A^{-1}(k_0)A^{-1}(k_0+1) \dots A^{-1}(k-1)$$

Se poniamo $k = k_0$ e $k_0 = k$ avremo

$$\Phi^{-1}(k_0, k) = A^{-1}(k)A^{-1}(k+1) \dots A^{-1}(k_0-1) = \Phi(k, k_0) \text{ per } k < k_0$$

Allora posso considerare

$$x(k) = \Phi(k, k_0) x_0 \quad \text{per } k > k_0$$

$$x(k) = \Phi^{-1}(k_0, k) x_0 \quad \text{per } k < k_0$$

RISPOSTA LIBERA NELL'USCITA

Noi sappiamo che, in generale, :

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k)$$

Nel caso di risposta libera

$$y(k) = C(k)x(k) = C(k)\Phi(k, k_0)x_0 =$$

$$= \psi(k, k_0)x_0$$

RISPOSTA FORZATA

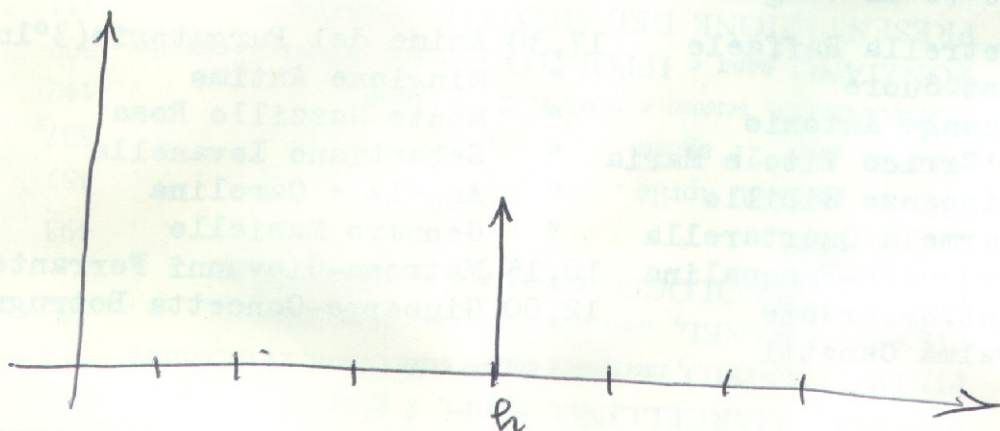
In generale

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$

Nel caso di risposte forzate $x(k_0) = 0$, $u(k) \neq 0$

Per determinare la risposta forzata diamo la seguente definizione. Si definisce impulso discreto di ampiezza unitaria, applicato all'istante h , il seguente

$$\delta(k-h) = \begin{cases} 1 & \text{se } k=h \\ 0 & \text{se } k \neq h \end{cases}$$



In generale diamo impulso di ampiezza $u(h)$ il seguente

$$u(k) = u(h)\delta(k-h) = \begin{cases} u(h) & \text{se } k=h \\ 0 & \text{se } k \neq h \end{cases}$$

Realizziamo ora come risponde il sistema se applichiamo in ingresso un impulso di ampiezza $u(h)$ supponendo il sistema a riposo inizialmente. Allora, se nell'istante h applichiamo l'impulso

$$u(k) = u(h)\delta(k-h)$$

il sistema, all'istante $h+1$, si può allo stato

$$x(h+1) = B(h)u(h)$$

In quanto, all'istante h , l'ingresso è proprio $u(h) \delta(k-h) = u(h)$ e lo stato è zero. Nell'istante $h+1$ avremo invece che l'ingresso è nullo mentre lo stato è diverso da zero, perciò avremo l'evoluzione libera a partire da $h+1$ e quindi

$$x(k) = \Phi(k, h+1) x(h+1) = \Phi(k, h+1) B(h) u(h)$$

Una volta determinata la risposta forzata nello stato ad un impulso, possiamo dimostrare che siamo in grado di calcolare la risposta forzata di un qualunque segnale di ingresso. Infatti, il segmento di ingresso $u[k_0, k)$ può essere visto come somma di $k - k_0$ impulsi di ampiezza $u(h)$ applicati in $h \in [k_0, k)$. Allora, siccome il nostro sistema è lineare, la risposta complessiva sarà la somma delle risposte dei singoli impulsi. Allora, in generale, la risposta forzata nello stato, corrispondente ad un ingresso u , sarà

$$x_f(k) = \sum_{h=k_0}^{k-1} \Phi(k, h+1) B(h) u(h) = \sum_{h=k_0}^{k-1} H(k, h+1) u(h)$$

Vogliamo determinare, ora, la risposta forzata all'uscita

$$y(k) = C(k) x(k) + D(k) u(k)$$

quindi

$$y_f(k) = C(k) x_f(k) + D(k) u(k) =$$

$$= C(k) \left(\sum_{h=k_0}^{k-1} \Phi(k, h+1) B(h) u(h) \right) + D(k) u(k) =$$

$$= \sum_{h=k_0}^{k-1} C(k) \Phi(k, h+1) B(h) u(h) + D(k) u(k)$$

dove

$$y_f(k) = \sum_{h=k_0}^k W(k, h) u(h)$$

dove

$$W(k, h) = \begin{cases} C(k) \Phi(k, h+1) B(h) & h < k \\ D(k) & h = k \end{cases}$$

ed è detta matrice delle risposte impulsive.
Il suo generico elemento $W_{ij}(k, h)$ rappresenta la
risposta forzata, all'istante k , dell'uscita i -esima del
sistema ad un impulso di ampiezza unitaria,
applicato all'istante h all'ingresso j -esimo. Infatti:
se considero un sistema a più ingressi e più
uscite e considero il seguente ingresso

$$u(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \delta(k - \hat{h}) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

che corrisponde ad ingressi tutti nulli tranne
il j -esimo al quale è applicato un impulso all'
istante $\hat{h}$, in uscita avrò la seguente risposta forzata

$$y_f(k) = W(k, \hat{h}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Infatti, dalla sommatoria

$$\sum_{h=k_0}^k W(k, h) u(h)$$

l'unico termine diverso da zero è quello per $h = \hat{h}$ in cui

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$$

e allora

$$y_f(k) = W(k, \hat{h}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = W_j(k, \hat{h})$$

dove W_j è la j -esima colonna di W per cui la i -esima uscita di y_f è $W_{ij}(k, \hat{h})$.

La sommatoria

$$\sum_{h=k_0}^k W(k, h) u(h)$$

prende il nome di sommatoria di conduzione e la matrice $W(k, h)$ di suo nucleo.

In sintesi possiamo dire che le risposte totali nello stato e nell'uscita sono

$$x(k) = x_e + x_f = \phi(k, k_0) x_0 + \sum_{h=k_0}^{k-1} H(k, h) u(h)$$

$$y(k) = y_e + y_f = C(k) \phi(k, k_0) x_0 + \sum_{h=k_0}^{k-1} H(k, h) u(h) + D(k) u(k)$$

$\Downarrow$

$$x(k) = \phi(k, k_0) x_0 + \sum_{h=k_0}^{k-1} H(k, h) u(h)$$

$$y(k) = \phi(k, k_0) x_0 + \sum_{h=k_0}^k W(k, h) u(h)$$

Queste è la rappresentazione esplicita del sistema

Se il sistema è stazionario, possiamo sempre avere $k_0=0$ e porre $k-1$

$$x(k) = \Phi(k)x_0 + \sum_{h=0}^{k-1} H(k, h) u(h) =$$

$$= \Phi(k)x_0 + \sum_{h=0}^{k-1} H(k-h) u(h)$$

$$y(k) = \psi(k)x_0 + \sum_{h=0}^k w(k, h) u(h) =$$

$$= \psi(k)x_0 + \sum_{h=0}^k w(k-h) u(h)$$

Infatti, se il sistema è stazionario,

$$\Phi(k, h) = A(k-1)A(k-2) \dots A(h) =$$

$$= A \cdot A \cdot \dots A = A^{k-h} = \Phi(k-h)$$

$$\Phi(k, 0) = A^k = \Phi(k)$$

Inoltre

$$\psi(k, k_0) = c(k) \Phi(k, 0) = c \Phi(k) = \psi(k)$$

$$H(k, h) = \Phi(k, h+1) B(h) = A^{k-h-1} B = H(k-h)$$

$$w(k, h) = \begin{cases} c(k) \Phi(k, h+1) B(h) = c A^{k-h-1} B = w(k-h) & h < k \\ D(k) = D & h = k \end{cases}$$

In definitiva

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} B u(h)$$

$$y(k) = C A^k x_0 + \sum_{h=0}^{k-1} C A^{k-h-1} B u(h) + D u(k)$$

RISPOSTA AL GRADINO

Supponiamo di applicare, all'ingresso un gradino applicato in 0

$$u(k) = u_0 \mathbb{1}(k) = \begin{cases} u_0 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

nel caso di sistemi lineari e stazionari. Possiamo dimostrare che la risposta nello stato a questo gradino è

$$x(k) = (I - A)^{-1} B u_0 + A^k (x_0 + (A - I)^{-1} B u_0) \quad k \geq 0$$

In fatti sappiamo che in un sistema lineare e stazionario la risposta nello stato ad un generico ingresso $u(k)$ è

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} B u(h)$$

Se adesso $u(k)$ è proprio il gradino ovvero che per $k \geq 0$

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} B u_0 =$$

$$= A^k x_0 + (A^{k-1} + A^{k-2} + \dots + I) B u_0 =$$

$$= A^K x_0 + (I - A)^{-1} (I - A^K) B u_0$$

Infatti $A^{K-1} + A^{K-2} + \dots + I$ è una serie geometrica di ragione A e la somma dei suoi primi K termini è

$$(I - A)^{-1} (I - A^K)$$

$$\begin{aligned} x(K) &= A^K x_0 + (I - A)^{-1} B u_0 + (I - A)^{-1} A^K B u_0 = \\ &= (I - A)^{-1} B u_0 + A^K x_0 + \cancel{(I - A)^{-1}} B u_0 \end{aligned}$$

Le risposte nell'uscita al quadrato vale per $K \geq 0$

$$y(K) = C A^K x_0 + \sum_{h=0}^{K-1} C A^{K-h-1} B u_0 + D u_0 =$$

$$= C A^K x_0 + C (A^{K-1} + A^{K-2} + \dots + I) B u_0 + D u_0 =$$

$$= C A^K x_0 + C (I - A)^{-1} (I - A^K) B u_0 + D u_0 =$$

$$= C A^K x_0 + C (I - A)^{-1} B u_0 - C (I - A)^{-1} A^K B u_0 + D u_0 =$$

$$= (C (I - A)^{-1} B + D) u_0 + C A^K (x_0 + \cancel{(I - A)^{-1}} B u_0)$$

ESEMPIO

Studieremo il processo di ammortamento di un capitale mediante rate semestrali. Ricordiamo che le equazioni sono

$$x(k+1) = \left(1 + \frac{i}{2}\right)x(k) - u(k)$$

$$y(k) = \left(1 + \frac{i}{2}\right)x(k) - u(k)$$

in cui $u(k)$ rappresenta la rata semestrale da pagare e $y(k)$ il restante capitale da ammortare ed i il tasso di interesse per un anno.

Nell'ipotesi che le rate siano costanti e pari ad u_0 ci poniamo il problema di ^{calcolare} quanto deve essere u_0 per ammortare il capitale in un numero N di rate. In effetti, a partire da un certo istante $k=0$, noi applichiamo al sistema un gradino di ampiezza u_0 .

Noi sappiamo che la risposta a questo gradino è

$$y(k) = (C(I-A)^{-1}B + D)u_0 + CA^k(x_0 - (I-A)^{-1}Bu_0)$$

Nel nostro caso

$$y(k) = \left(\left(1 + \frac{i}{2}\right)\left(1 - 1 - \frac{i}{2}\right)^{-1} - 1\right)u_0 + \left(1 + \frac{i}{2}\right)\left(1 + \frac{i}{2}\right)^k\left(x_0 - \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{-1}u_0\right) =$$

$$= \left(\frac{1 + \frac{i}{2}}{\frac{i}{2}} - 1\right)u_0 + \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{k+1}\left(x_0 + \frac{u_0}{\frac{i}{2}}\right) =$$

$$= \frac{u_0}{\frac{i}{2}} + \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{k+1}x_0 - \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{k+1}\frac{u_0}{\frac{i}{2}} =$$

lo studio possa essere semplificato.

Immaginiamo allora con

$$T(k) = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

una matrice quadrata invertibile in modo tale che con le sue colonne posso costruire una base.

Se $z(k)$ è la nuova rappresentazione dello stato nella nuova rappresentativa base $t_1, t_2 \dots t_m$, avrò che

$$x(k) = t_1 z_1 + t_2 z_2 + \dots + t_m z_m = (t_1 \dots t_m) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} =$$

$$= T(k) z(k)$$

per cui se $T(k)$ è invertibile

$$z(k) = T^{-1}(k) x(k)$$

vedremo ora come si trasformano le equazioni compilate

$$x(k+1) = A(k) T(k) z(k) + B(k) u(k)$$

$$y(k) = C(k) T(k) z(k) + D(k) u(k)$$

Se moltiplichiamo la 1^a e sinistra per $T^{-1}(k+1)$

$$\text{avremo } T^{-1}(k+1) x(k+1) = z(k+1) = T^{-1}(k+1) A(k) T(k) z(k) + T^{-1}(k+1) B(k) u(k)$$

$$y(k) = C(k) T(k) z(k) + D(k) u(k)$$

Se poniamo

$$\hat{A}(k) = T^{-1}(k+1) A(k) T(k)$$

$$\hat{B}(k) = T^{-1}(k+1) B(k)$$

$$\hat{C}(k) = C(k) T(k)$$

$$\hat{D}(k) = D(k)$$

possiamo passare nella nuova base

$$\textcircled{2} \quad \begin{aligned} z(k+1) &= \hat{A}(k) z(k) + \hat{B}(k) u(k) \\ y(k) &= \hat{C}(k) z(k) + \hat{D}(k) u(k) \end{aligned}$$

Si osserva, allora, come, scegliendo opportunamente la base T , la matrice A si può semplificare, ad esempio può diventare diagonale. Osserviamo anche che, facendo il cambiamento di base, il sistema mantiene ancora la stessa struttura. Vogliamo adesso ricadere dalle $\textcircled{2}$ le forme esplicite nella nuova base T . Vogliamo, ad esempio, come si trasformano le risposte libere nello stato

$$x_e(k) = \Phi(k, k_0) x_0$$

vogliamo cioè come si trasformano le matrici di transizione $\Phi(k, k_0)$

$$x(k) = \Phi(k, k_0) T(k_0) z(k_0)$$

Moltiplicando a sinistra per $T^{-1}(k)$ otteniamo

$$T^{-1}(k) x(k) = T^{-1}(k) \Phi(k, k_0) T(k_0) z(k_0)$$

$$z(k) = \hat{\Phi}(k, k_0) z(k_0)$$

con

$$\hat{\Phi}(k, k_0) = T^{-1}(k) \hat{\Phi}(k, k_0) T(k_0)$$

Abbiamo determinato la matrice di transizione nella nuova base T . Vediamo, adesso, la matrice delle risposte impulsive

$$Y_f(k) = \sum_{i=k_0}^k W(k, i) u(i) \Rightarrow \hat{W}(k, h) = W(k, h)$$

Essa non cambia e questo trova spiegazione nel fatto che la matrice delle risposte impulsive stabilisce un legame ingresso-uscite che è un fatto interno del sistema, indipendente dalle basi T . Naturalmente T viene scelta in modo tale che non portasse a conclusioni prive di interesse. Ad esempio se scegliamo $T(k) = \hat{\Phi}(k, k_0)$, l'evoluzione libera dello stato nella nuova base diventa

$$Z(k) = \hat{\Phi}(k, k_0) Z(k_0) =$$

$$= T^{-1}(k) \hat{\Phi}(k, k_0) T(k_0) Z(k_0) =$$

$$= \hat{\Phi}^{-1}(k, k_0) \hat{\Phi}(k, k_0) \hat{\Phi}(k_0, k_0) Z(k_0) =$$

$$= I \cdot I \cdot Z(k_0) = Z(k_0)$$

per cui l'evoluzione libera, in questa nuova base, appare costantemente uguale a $Z(k_0)$ e quindi $Z(k)$ e $X(k)$ non hanno lo stesso carattere di convergenza o divergenza.

Dimostriamo che il

TEOREMA DI FLOQUET-LYAPUNOV

Se la matrice dinamica del sistema è periodica di periodo N , cioè

$$A(k+N) = A(k)$$

allora esiste un cambiamento di variabili

$$z(k) = T^{-1}(k) x(k)$$

con $T(k)$ limitata con la sua inversa, tale che

$$\hat{A}(k) = T^{-1}(k+1) A(k) T(k) = \text{cost}$$

Poniamo allora $\longleftrightarrow$

$$\Phi(k, 0) = A(k-1)A(k-2) \dots A(0) = F^k$$

dove F è la
radice n -esima di
 $\Phi(N, 0)$

e consideriamo la matrice

$$T(k) = \Phi(k, 0) F^{-k}$$

facciamo vedere che questa è una matrice periodica di periodo N per cui $T(k)$ è limitata con la sua inversa $T^{-1}(k)$. Infatti:

$$T(k+N) = \Phi(k+N, 0) F^{-k-N} =$$

$$= \Phi(k+N, N) \Phi(N, 0) F^{-N} F^{-k}$$

$$\text{ma } \Phi(N, 0) = F^N \Rightarrow \Phi(N, 0) F^{-N} = I$$

Inoltre essendo $A(k)$ periodica di periodo N sarà periodica anche la matrice di transizione

$$\Phi(k+N, 0) = \Phi(k, 0)$$

Allora

$$T(k+n) = \Phi(n+k, n) F^{-k} = \Phi(k, 0) F^{-k} = T(k) \Rightarrow$$

$$\hat{A}(k) = T^{-1}(k+1) A(k) T(k) = F^{k+1} \Phi(0, k+1) A(k) \Phi(k, 0) F^{-k}$$

Infatti

$$T^{-1}(k) = (\Phi(k, 0) F^{-k})^{-1} = F^k \Phi^{-1}(k, 0) = F^k \Phi(0, k)$$

Allora

$$\hat{A}(k) = F^{k+1} \Phi(0, k+1) \Phi(k+1, 0) F^{-k} = F = \text{cost}$$

Infatti

$$A(k) \Phi(k, 0) = A(k) A(k-1) \dots A(0) = \Phi(k+1, 0) = \Phi^{-1}(0, k+1)$$

Quindi ogni sistema periodico e reversibile può essere trasformato, con un opportuno cambiamento di base, in un altro con matrice dinamica costante avente le stesse proprietà di convergenza e divergenza.

Consideriamo il seguente sistema lineare continuo nella sua forma compatta

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

Vogliamo determinare la risposta nello stato e nell'uscita, cioè il modello esplicito. Poiché il sistema è lineare possiamo dividere la risposta in risposta libera e risposta forzata.

RISPOSTA LIBERA

Poiché si tratta di risposta libera $u=0$, $x(t_0)=x_0$ per cui

$$\dot{x}_e(t) = A(t)x_e(t)$$

$$x_e(t_0) = x_0$$

Osservo che $x_e(t) = \Phi(t, t_0)x_0$ è soluzione dell'equazione e verifica le condizioni iniziali, dove, però, $\Phi(t, t_0)$, chiamata ancora matrice di transizione del sistema, soddisfa le seguenti proprietà

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$$

$$\Phi(t_0, t_0) = I$$

dove questa è una equazione differenziale matriciale. Verifichiamo, allora, se, sotto queste condizioni, la soluzione $x_e(t) = \Phi(t, t_0)x_0$ soddisfa l'equazione differenziale con $u=0$

$$\dot{x}_e(t, t_0) = \dot{\Phi}(t, t_0)x_0 = A(t)\Phi(t, t_0)x_0 = A(t)x_e(t)$$

$$x_e(t_0) = \Phi(t_0, t_0) x_0 = I x_0 = x_0$$

Allora non abbiamo fatto altro che spostare il problema poiché, anziché risolvere l'equazione differenziale originale avremmo a risolvere l'equazione

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \Phi(t, t_0)$$

Per individuare la matrice di transizione $\Phi(t, t_0)$ ci si può avvalere di uno dei seguenti risultati.

Consideriamo l'equazione

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

Di queste equazione troviamo n soluzioni particolari

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$$

linearmente indipendenti. Poi consideriamo la matrice $X(t)$ che si ottiene mettendo queste soluzioni una a fianco dell'altra. Così la matrice $X(t)$ ha, per colonne, le n soluzioni particolari considerate sopra

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Allora la matrice di transizione sarà

$$\Phi(t, t_0) = X(t) \cdot X^{-1}(t_0)$$

Infatti la soluzione generale dell'equazione

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

è

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_m x_m(t) =$$

$$= (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = X(t)C$$

dove $X(t)$ è la matrice data sopra.

Naturalmente il vettore c lo debbo determinare in modo tale da soddisfare le CI per ottenere la particolare soluzione corrispondente a $x(t_0) = x_0$.

Deve essere allora

$$x_0 = x(t_0) = X(t_0)c \Rightarrow c = X^{-1}(t_0)x_0$$

Trovato c mi viene la soluzione particolare

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0$$

Confrontando quest'ultima con $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$ trovo che

$$\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$$

Possiamo, adesso, enunciare alcune proprietà della Φ .
Si osserva, anzitutto, che la matrice Φ è sempre invertibile in quanto prodotto di due matrici non singolari.

Inoltre

$$\Phi(t_0, t_0) = \Phi^{-1}(t, t_2)$$

Infatti:

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = (X(t)X^{-1}(t_0))^{-1} = X(t_0)X^{-1}(t) = \Phi(t_0, t)$$

Infine vale anche quest'ultima proprietà

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1) \Phi(t_1, t_0)$$

Infatti:

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)x_0$$

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$$

Se prendo allora come punto iniziale t_1 avrò

$$x(t) = \Phi(t, t_1)x(t_1) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0)x_0$$

Osservo, inoltre, che la $\Phi(t, t_0)$ la si può ottenere anche mediante la chiusura di questa serie

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) = I + \int_{t_0}^t A(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_0}^t A(\tau_1) d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 + \dots + \\ + \int_{t_0}^t A(\tau_1) d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 \dots \int_{t_0}^{\tau_{k-1}} A(\tau_k) d\tau_k + \dots \end{aligned}$$

Questa serie viene chiamata serie di Peano-Baker. Esiste un teorema che non dimostreremo che dice che questa serie converge uniformemente alla matrice di transizione $\Phi(t, t_0)$ su ogni intervallo chiuso di $\mathbb{R}$ in cui $A(t)$ è limitata. Se $A(t)$ è costante, la serie converge su tutto $\mathbb{R}$ reale. Faremo vedere, però, che la Φ così ottenute soddisfa le proprietà delle matrici di transizione. Infatti

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(t, t_0) &= A(t) + A(t) \int_{t_0}^t A(\tau_2) d\tau_2 + \dots + A(t) \int_{t_0}^t A(\tau_2) d\tau_2 \dots \int_{t_0}^{t_{k-1}} A(\tau_k) d\tau_k + \dots = \\ &= A(t) \left(I + \int_{t_0}^t A(\tau_2) d\tau_2 + \dots + \int_{t_0}^t A(\tau_2) d\tau_2 \dots \int_{t_0}^{t_{k-1}} A(\tau_k) d\tau_k + \dots \right) = \\ &= A(t) \Phi(t, t_0)\end{aligned}$$

$$\text{e } \Phi(t_0, t_0) = I$$

Facciamo vedere, adesso, che la serie di Peano-Baker in alcuni casi si può mettere in una forma diversa.

Facciamo l'ipotesi che la matrice dinamica del sistema sia commutativa, cioè:

$$A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

In queste ipotesi la serie di Peano-Baker si può scrivere

$$\begin{aligned}\Phi(t, t_0) &= e^{\int_{t_0}^t A(\delta) d\delta} = I + \int_{t_0}^t A(\delta) d\delta + \frac{1}{2!} \left(\int_{t_0}^t A(\delta) d\delta \right)^2 + \dots + \\ &+ \frac{1}{k!} \left(\int_{t_0}^t A(\delta) d\delta \right)^k + \dots\end{aligned}$$

Osserviamo, allora, che, affinché la serie scritta ultimamente coincida con la serie di Peano-Baker, i termini corrispondenti delle due serie devono essere uguali per ogni $k \geq 1$

Debo mostrare, dunque, che

$$\frac{1}{K!} \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right)^K = \int_{t_0}^t A(\tau_1) d\tau_1 \times \dots \times \int_{t_0}^{\tau_{K-1}} A(\tau_K) d\tau_K \quad \forall K \geq 1$$

Se riesco a mostrare che questa uguaglianza è vera sia per K che per $K-1$, allora le due serie per induzione coincidono. In effetti la relazione è proprio vera per $t=t_0, \forall K$. Allora le due serie coincidono. Dobbiamo allora far vedere che queste nuove serie convergenti verso $\Phi(t, t_0)$ verificano sempre le proprietà della funzione di transizione e che le derivate coincidono se la matrice A è commutativa.

$$\frac{d^2 A^2}{dt^2} = 2 A(t) \dot{A}(t)$$

Inferi: $\frac{d^2 A^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} [A(t) \cdot A(t)] = \dot{A}(t) A(t) + A(t) \dot{A}(t)$

che, in generale, $\neq 2 A(t) \dot{A}(t)$. Se A è commutativa

$$\frac{d}{dt} [A(t) A(t)] = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{A(t+\Delta) - A(t)}{\Delta} A(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{A(t+\Delta) A(t) - A(t) A(t)}{\Delta}$$

ma se $A(t)$ è commutativa

$$A(t+\Delta) A(t) = A(t) A(t+\Delta)$$

quindi

$$\dot{A}(t) A(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} A(t) \frac{A(t+\Delta) - A(t)}{\Delta} = A(t) \dot{A}(t)$$

per cui

$$\frac{d A^2}{dt} = 2 A(t) \dot{A}(t)$$

In generale

$$\frac{d}{dt} A(t)^k = k A(t)^{k-1} \dot{A}(t)$$

Detto questo si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{k!} \left(\int_{t_0}^t A(\delta) d\delta \right)^k \right) &= \frac{k}{k!} A(t) \left(\int_{t_0}^t A(\delta) d\delta \right)^{k-1} = \\ &= \frac{1}{(k-1)!} A(t) \left(\int_{t_0}^t A(\delta) d\delta \right)^{k-1} \end{aligned}$$

Per l'ipotesi di induzione, questa derivata deve essere proprio uguale alla derivata del termine corrispondente k -esimo delle serie di Peano-Baker.

$$\frac{1}{(k-1)!} A(t) \left(\int_{t_0}^t A(\delta) d\delta \right)^{k-1} = \frac{d}{dt} \left(\int_{t_0}^t A(\tau_1) d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{k-1}} A(\tau_k) d\tau_k \right) =$$

$$= A(t) \int_{t_0}^t A(\tau_2) d\tau_2 \int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_3) d\tau_3 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{k-1}} A(\tau_k) d\tau_k$$

Derivando tutti i termini delle due serie otteniamo

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) + A(t) \int_{t_0}^t A(\delta) d\delta + \dots + \frac{A(t)}{k!} \left(\int_{t_0}^t A(\delta) d\delta \right)^k + \dots =$$

$$= A(t) + A(t) \int_{t_0}^t A(\tau_2) d\tau_2 + \dots + A(t) \int_{t_0}^t A(\tau_2) d\tau_2 \int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_3) d\tau_3 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{k-1}} A(\tau_k) d\tau_k + \dots$$

cioè

$$\begin{aligned}
 & A(t) \left(I + \int_{t_0}^t A(s) ds + \frac{1}{2!} \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right)^2 + \dots + \frac{1}{(k-1)!} \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right)^{k-1} + \dots \right) = \\
 & = A(t) \left(I + \int_{t_0}^t A(\tau_2) d\tau_2 + \dots + \int_{t_0}^t A(\tau_2) d\tau_2 \int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_3) d\tau_3 \dots \int_{t_0}^{\tau_{k-1}} A(\tau_k) d\tau_k + \dots \right) = \\
 & = A(t) \Phi(t, t_0)
 \end{aligned}$$

Quindi, effettivamente le due serie sono uguali assieme alle derivate in quanto, avendo dimostrato prima per induzione, l'uguaglianza delle due serie, i termini in parentesi e primo e secondo membro sono uguali, per cui anche le derivate sono uguali e perci proprio ~~il~~ ad $A(t) \Phi(t, t_0)$ che soddisfa proprio la 1^a proprietà della funzione di transizione

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \Phi(t, t_0)$$

~~RISPOSTA FORZATA~~

Per i sistemi stazionari la matrice A è costante per cui

$$\Phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(s) ds} = e^{A(t-t_0)} = \Phi(t, t_0)$$

Quindi, per i sistemi stazionari, Φ dipende dalla differenza $t-t_0$ per cui

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = I + A(t-t_0) + \frac{A^2}{2!} (t-t_0)^2 + \dots$$

Determinate le risposte libere nello stato, vogliamo determinare le risposte libere nelle uscite

Siccome $u(t)=0$, $x(t_0)=0$

$$x_e(t) = C(t) x_e(t) = C(t) \Phi(t, t_0) x_0 = \phi(t, t_0) x_0$$

RISPOSTA FORZATA

Siccome $x(t_0)=0$ e $u(t) \neq 0$ avremo che

$$x_f(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t H(t, \tau) u(\tau) d\tau$$

Infatti si può osservare che questa soluzione verifica proprio la c.i. $x(t_0)=0$ e soddisfa l'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

Infatti:

$$\dot{x}_f(t) = \Phi(t, t) B(t) u(t) + \int_{t_0}^t \dot{\Phi}(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau =$$

$$= B(t) u(t) + \int_{t_0}^t A(t) \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau =$$

$$= B(t) u(t) + A(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau =$$

$$= A(t)x_f(t) + B(t)u(t)$$

Inoltre $x_f(t_0)=0$.

La risposta forzata nello stato si può ottenere anche in un altro modo e precisamente mettendolo in ingresso un impulso di ampiezza infinitesimale $u(\tau) d\tau$.

Allora il sistema si trova inizialmente nello stato zero, ma, per quello che abbiamo detto precedentemente, mettendo l'impulso, il sistema si porta in un certo stato e poi evolve da questo stato liberamente.

Per determinare questa evoluzione libera dobbiamo integrare l'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

in un intervallo $\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon$ e poi passare al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \dot{x}(t) dt = \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} A(t)x(t) dt + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} B(t)u(t) \delta(t-\tau) dt$$

$$x(\tau+\varepsilon) - x(\tau-\varepsilon) = \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} A(\zeta)x(\zeta) d\zeta + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} B(\zeta)u(\zeta) \delta(\zeta-\tau) d\zeta$$

Ora poichè $x(\tau-\varepsilon) = 0$ e $x(\tau+\varepsilon) \neq 0$ per cui, passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ otteniamo

$$x(\tau+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} A(\zeta)x(\zeta) d\zeta + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} B(\zeta)u(\zeta) \delta(\zeta-\tau) d\zeta$$

$$x(\tau+) = \int B(\tau)u(\tau) d\tau$$

e cioè il sistema, nell'istante $\tau+$, si porta, per effetto dell'impulso, nello stato $\int B(\tau)u(\tau) d\tau$, dopo di che avviene l'evoluzione libera. E, ricordando che l'evoluzione libera di un sistema a partire da uno stato x_0 è

APPENDICE

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$$

nel mostro caso

$$x(t) = \oint(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$$

allora, siccome un ingresso generico $u[t_0, t]$ lo posso vedere come somma di tanti ^{infiniti} impulsi da t_0 a t , e integrando la relazione di sopra da t_0 a t , avremo l'evoluzione libera nello stato per effetto dell'ingresso

in $u[t_0, t]$:

$$x_f(t) = \int_{t_0}^t \oint(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$$

Troviamo, adesso, l'evoluzione forzata nell'uscita

$$y_f(t) = C(t) x_f(t) + D(t) u(t) =$$

$$= C(t) \int_{t_0}^t \oint(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + D(t) u(t) =$$

$$= \int_{t_0}^t [C(t) \oint(t, \tau) B(\tau) + D(t) \delta(t-\tau)] u(\tau) d\tau$$

Se chiamo adesso $W(t, \tau)$ la matrice

$$C(t) \oint(t, \tau) B(\tau) + D(t) \delta(t-\tau)$$

posso scrivere che

$$y_f(t) = \int_{t_0}^t W(t, \tau) u(\tau) d\tau$$

che è proprio l'integrale di convoluzione tra la matrice W e l'ingresso u . $W(t, \tau) = \{ w_{ij}(t, \tau) \}$ si chiama matrice delle risposte impulsive. Per definizione possiamo dire che, per i sistemi a tempo continuo, abbiamo

$$x(t) = x_e(t) + x_p(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t H(t, \tau) u(\tau) d\tau$$

$$y(t) = y_e(t) + y_p(t) = \psi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t W(t, \tau) u(\tau) d\tau$$

RISPOSTA AL GRADINO PER SISTEMI CONTINUI E STAZIONARI

Consideriamo un sistema continuo e stazionario. Supponiamo di applicare ad esso un gradino di ampiezza u_0 e osserviamo le risposte nello stato e nella uscita.

$$x(t) = x_e(t) + x_p(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u_0 d\tau$$

avendo assunto $t_0 = 0$.

Infatti per i sistemi stazionari

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t, 0) = \Phi(t) = e^{At}$$

$$\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$$

Allora possiamo scrivere

$$x(t) = e^{At} x_0 + \left[-A^{-1} e^{A(t-\tau)} \right]_0^t B u_0 =$$

$$= e^{At} x_0 + [-A^{-1} B u_0 + A^{-1} e^{At} B u_0] =$$

$$= e^{At} x_0 + A^{-1} e^{At} B u_0 - A^{-1} B u_0 =$$

$$= e^{At} (x_0 + A^{-1} B u_0) - A^{-1} B u_0$$

Da questo segue allora che la risposta al gradino in uscita è

$$y(t) = C x(t) + D u(t) = C [e^{At} (x_0 + A^{-1} B u_0) + (-A^{-1} B u_0)] + D u_0 =$$

$$= C e^{At} x_0 + C e^{At} A^{-1} B u_0 + C (-A^{-1} B u_0) + D u_0 =$$

$$= (C(-A^{-1})B + D) u_0 + C e^{At} (x_0 + A^{-1} B u_0)$$

Anche per i sistemi continui è utile conviene operare un opportuno cambiamento di base nello spazio di stato, al fine di semplificare la matrice di transizione. Consideriamo allora il sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

Possiamo ~~trovare~~ n funzioni linearmente indipendenti che ci costituiscono una nuova base nello spazio di stato

$$T(t) = (t_1(t) \dots t_n(t))$$

Poniamo, allora, $z(t) = T^{-1}(t)x(t)$ con T matrice non singolare. Vediamo, allora, come si trasforma il sistema con questo cambiamento di variabili

$$\dot{z}(t) = \frac{d}{dt} T^{-1}(t)x(t) + T^{-1}(t)\dot{x}(t)$$

Ma

$$\frac{d}{dt} T^{-1}(t) = -T^{-1}(t)\dot{T}(t)T^{-1}(t)$$

Allora

$$\dot{\tilde{z}}(t) = -T^{-1}(t)\dot{T}(t)T^{-1}(t)x(t) + T^{-1}(t)\dot{x}(t) =$$

$$= -T^{-1}(t)\dot{T}(t)\tilde{z}(t) + T^{-1}(t)A(t)x(t) + T^{-1}(t)B(t)u(t) =$$

$$= -T^{-1}(t)\dot{T}(t)\tilde{z}(t) + T^{-1}(t)A(t)T(t)\tilde{z}(t) + T^{-1}(t)B(t)u(t)$$

$$\dot{\tilde{z}}(t) = (-T^{-1}(t)\dot{T}(t) + T^{-1}(t)A(t)T(t))\tilde{z}(t) + T^{-1}(t)B(t)u(t) =$$

$$= \hat{A}(t)\tilde{z}(t) + \hat{B}(t)u(t)$$

Per l'uscita adesso

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) =$$

$$= C(t)T(t)\tilde{z}(t) + D(t)u(t) = \hat{C}(t)\tilde{z}(t) + \hat{D}(t)u(t)$$

Osservo, poi, che la matrice W non cambia perché non deve cambiare il legame ingresso-uscita.

Vediamo, adesso, che succede alla matrice di transizione, sappiamo che

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$$

Moltiplicando a sinistra per T^{-1} avremo

$$T^{-1}(t)x(t) = T^{-1}(t)\Phi(t, t_0)T(t_0)z_0$$

$$\tilde{z}(t) = T^{-1}(t)\Phi(t, t_0)T(t_0)z_0 = \hat{\Phi}(t, t_0)z_0$$

Quindi cambia la matrice di transizione e con essa anche la matrice H

$$\hat{H} = \hat{\Phi}\hat{B} = T^{-1}(t)\Phi T(t_0)T^{-1}(t)B(t)$$

Come per i sistemi discreti, in pratica, si considerano solo cambiamenti di variabili tali che $T(t)$ sia limitate con la sua inversa $T^{-1}(t)$. In questo modo le risposte nella nuova base conserveranno lo stesso carattere di convergenza o divergenza delle risposte nella vecchia base.

A tale proposito esiste un teorema chiamato di Lyapunov-Floquet che afferma che se la matrice dinamica $A(t)$ è periodica di periodo T , cioè

$$A(t+T) = A(t)$$

esiste un cambiamento di variabile $z(t) = T^{-1}(t)x(t)$ con $T(t)$ limitate con la sua inversa $T^{-1}(t)$, tale che

$$\hat{A}(t) = -T^{-1}(t)\dot{T}(t) + T^{-1}(t)A(t)T(t) = \text{cost}$$

In questo modo ci riportiamo ad un sistema stazionario. **Dimostrazione:** Consideriamo il seguente cambiamento di variabili:

$$z(t) = T^{-1}(t)x(t)$$

e poniamo $\Phi(t, 0) = e^{Ft}$ dopodiché consideriamo la matrice $T(t) = \Phi(t, 0)e^{-Ft}$. Essendo una matrice periodica, infatti:

$$\begin{aligned} T(t+T) &= \Phi(t+T, 0)e^{-F(t+T)} = \Phi(t+T, T) \underbrace{\Phi(T, 0)^{-1}}_I e^{-Ft} = \\ &= \Phi(t+T, T)e^{-Ft} \end{aligned}$$

ma siccome la matrice A è periodica di periodo T avremo che

$$\Phi(t+T, T) = \Phi(t, 0)$$

Quindi

$$T(t+T) = \Phi(t+T, T) e^{-Ft} = \Phi(t, 0) e^{-Ft} = T(t)$$

Abbiamo, allora, che la matrice $T(t)$ è periodica
periodo T , per cui è limitata con la sua inversa.
Facciamo vedere, ora, che in questa nuova base
 $T(t)$, la nuova matrice dinamica viene costante. Infatti

$$\begin{aligned} \hat{A}(t) &= -e^{Ft} \Phi(0, t) \left[\dot{\Phi}(t, 0) e^{-Ft} - \Phi(t, 0) F e^{-Ft} \right] + \\ &\quad + e^{Ft} \Phi(0, t) A(t) \Phi(t, 0) e^{-Ft} = \\ &= -e^{Ft} \Phi(0, t) \left[A(t) \Phi(t, 0) e^{-Ft} + \dot{\Phi}(t, 0) F e^{-Ft} \right] + \\ &\quad + e^{Ft} \Phi(0, t) A(t) \Phi(t, 0) e^{-Ft} = \\ &= -e^{Ft} \Phi(0, t) A(t) \cancel{\Phi(t, 0) e^{-Ft}} + e^{Ft} \Phi(0, t) \underbrace{\Phi(t, 0) F e^{-Ft}}_I + \\ &\quad + e^{Ft} \cancel{\Phi(0, t) A(t) \Phi(t, 0) e^{-Ft}} = \\ &= e^{Ft} I F e^{-Ft} = e^{Ft} e^{-Ft} F = e^0 F = \text{costante} \end{aligned}$$

Come abbiamo già detto precedentemente, il punto
centrale per il calcolo delle risposte di un dato
sistema lineare è il calcolo della matrice di
trasmissione. Ricordiamo anche che, se il sistema
è stazionario e Tempo continuo

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \dots + \frac{A^k}{k!} t^k$$

e x è tempo discreto

$$\Phi(k) = A^k$$

Per il calcolo di A^k e di A^T e A^t bisogna premere il concetto di autovalore e di autovettore di una matrice.

Sia allora A una matrice $n \times n$ con elementi $\in \mathbb{C}$.
Uno scalare $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice autovalore di A se esiste un vettore $u \neq 0$, detto autovettore associato a λ , tale che

$$Au = \lambda u$$

Osserviamo che, se u è un autovettore, anche αu , con $\alpha \neq 0$, è un autovettore. Osserviamo, allora, che λ è un autovalore di A se e solo se

$$\exists u \neq 0 : (\lambda I - A)u = 0 \quad \text{e, eff. mche} \quad (\lambda I - A)u = 0$$

per $u \neq 0$ deve essere

$$(\lambda I - A) = 0$$

che è un sistema di equazioni lineari che può ammettere soluzioni, dove ~~esse~~ essere il nullo

$$\rho(\lambda I - A) < n$$

ossia il determinante di ordine n

$$|\lambda I - A| = 0$$

allora gli autovalori sono soluzioni dell'equazione caratteristica della matrice A

$$|\lambda I - A| = P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Naturalmente, una volta che ne abbiamo determinato un autovalore λ_i , possiamo calcolarci

l'autovalore ed esso associato u_i che è soluzione dell'equazione

$$(\lambda_i I - A)u_i = 0$$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 6 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = -3$$

Di conseguenza, gli autovalori sono

$$\lambda_1 \Rightarrow |\lambda_1 I - A|u_1 = 0 \Rightarrow [-2I - A]u_1 = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = 0$$

$$-2u_{11} - u_{12} = 0$$

$$6u_{11} + 3u_{12} = 0$$

Osservo che la seconda equazione dipende dalla prima secondo il fattore -3 . Allora gli autovettori corrispondenti a $\lambda_1 = -2$ si ottengono risolvendo

$$-2u_{11} - u_{12} = 0$$

Naturalmente, questa ammette soluzione per ogni assegnato valore, ad esempio di u_{12} . Osservo che tutti gli autovettori sono fra loro proporzionali. Se, ad esempio, $u_{12} = -2$, $u_{11} = 1$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\text{e, invece, } u_{12} = 3 \Rightarrow u_{11} = -\frac{3}{2} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -3 \Rightarrow (\lambda_2 I - A)u_2 = 0 = (-3I - A)u_2$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} \right\} u_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = 0$$

$$-3u_{21} - u_{22} = 0$$

$$6u_{21} + 2u_{22} = 0$$

Ma esso in cui una coppia di autovettori è complessa coniugata, la coppia di autovettori corrispondente è, anche essa complessa coniugata.

Ad esempio consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

Da cui

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vediamo gli autovettori

$$\lambda_1 \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ +1 & \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Perché una riga dipende dall'altra, abbiamo una sola equazione

$$\left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}\right) u_{11} - u_{12} = 0$$

$$\text{Pongo } u_{11} = 1 \Rightarrow u_{12} = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ +1 & -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(-\frac{1}{2} -j \frac{\sqrt{3}}{2}\right) u_{21} - u_{22} = 0$$

Pongo $u_{21} = 1 \Rightarrow u_{22} = -\frac{1}{2} -j \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} -j \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Prendiamo adesso, in considerazione alcuni casi particolari di matrici e vediamo come possono essere calcolati gli autovalori e quindi gli autovettori. Se la matrice ^{è diagonale} gli autovalori coincidono con gli elementi della diagonale

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Se la matrice è triangolare alta o bassa, gli autovettori coincidono ancora con gli elementi della diagonale principale.

Se la matrice è triangolare a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

ovvero che il polinomio caratteristico è dato dal prodotto dei polinomi caratteristici dei blocchi

che stanno sulla diagonale principale, cioè

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - A_{11}| |\lambda I - A_{22}|$$

Consideriamo, adesso, una matrice in forma compag.
orizzontale inferiore

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_m & -a_{m-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$$

Si può fare vedere, per induzione, che, in questo caso il polinomio caratteristico è il seguente

$$P(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m$$

dove i coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_m$ sono gli elementi dell'ultima riga della matrice ma cambiati di segno.

Inoltre, in questo caso, se gli autovalori sono distinti, il generico autovettore u_i corrispondente all'autovalore λ_i risulta essere

$$u_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{m-1} \end{pmatrix}$$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda + 0 = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \quad \lambda = -1 \pm \sqrt{1-4}$$

$$\lambda_2 = -1 + j\sqrt{3}$$

$$\lambda_3 = -1 - j\sqrt{3}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + j\sqrt{3} \\ 1 - 3 - 2j\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - j\sqrt{3} \\ -2 + 2j\sqrt{3} \end{pmatrix} = u_2^* *$$

Facciamo vedere, adesso, il seguente risultato.
Se A è la matrice dinamica di un sistema stazionario e casidaro, poi, la nuova matrice

$$\hat{A} = T^{-1}AT$$

e due matrici A e $\hat{A}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico e, quindi, gli stessi autovalori.
Infatti.

$$|\lambda I - \hat{A}| = \hat{P}(\lambda) = |\lambda T^{-1}T - T^{-1}AT| =$$

$$= |T^{-1}| |\lambda I - A| |T| = |T^{-1}| |T| |\lambda I - A| =$$

$$= |\lambda I - A| = P(\lambda)$$

vale, inoltre, il seguente risultato.

Se gli n autovalori di una matrice stazionaria sono tutti distinti, cioè $\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$, allora i corrispondenti autovettori $u_1 \dots u_n$ sono linearmente indipendenti.

Per dimostrare questo ragioniamo per assurdo.

Sappiamo che non sono linearmente indipendenti. Questo significa che esistono n scalari $c_1, c_2, \dots, c_n$ non tutti nulli, tali che

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = 0$$

Sappiamo, allora, che sia $c_i \neq 0$. Si moltiplichino ambo i membri della relazione per

$$(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I) \dots (A - \lambda_n I)$$

Avremo

$$c_1 (\lambda_1 I - A)(\lambda_3 I - A) u_1 + c_2 (\lambda_1 I - A)(\lambda_3 I - A) u_2 + c_3 (\lambda_1 I - A)(\lambda_3 I - A) u_3 + \dots$$

essendo supposto, per semplicità, $n=3$.

Notiamo che

$$(\lambda_j I - A) u_i = \lambda_j u_i - A u_i = \lambda_j u_i - \lambda_i u_i$$

poiché, per definizione,

$$A u_i = \lambda_i u_i$$

con:

$$[(\lambda_2 I - A)(\lambda_3 I - A)]u_3 = (\lambda_2 I - A)(\lambda_3 - \lambda_3)u_3 = \\ = (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_3)u_3 = 0$$

$$(\lambda_2 I - A)(\lambda_3 I - A)u_1 = (\lambda_2 I - A)(\lambda_3 - \lambda_1)u_1 = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)u_1$$

$$(\lambda_2 I - A)(\lambda_3 I - A)u_2 = (\lambda_2 I - A)(\lambda_3 - \lambda_2)u_2 = (\lambda_2 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)u_2 = 0$$

da cui

$$c_1(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)u_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)u_2 + c_3(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_3)u_3 = 0$$

$\Downarrow$

$$c_1(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)u_1 = 0$$

poiché $\lambda_2 \neq \lambda_1$, $\lambda_3 \neq \lambda_1$, $u_1 \neq 0$ deduciamo $c_1 = 0$
contro l'ipotesi.

Supponiamo di avere una funzione

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_k A^k + \dots$$

Vogliamo trovare cosa succede se, al posto della
matrice A , mettiamo la matrice $\hat{A} = T^{-1}AT$

$$f(\hat{A}) = a_0 I + a_1 T^{-1}AT + a_2 T^{-1}A^2T + \dots + a_k T^{-1}A^kT + \dots$$

$$\text{Infatti: } \hat{A}^k = T^{-1}A^kT$$

$$f(\hat{A}) = a_0 T^{-1}I + a_1 T^{-1}AT + \dots + a_k T^{-1}A^kT + \dots$$

$$f(\hat{A}) = T^{-1}(a_0 I + a_1 A + \dots + a_k A^k + \dots)T =$$

$$= T^{-1}f(A)T$$

Allora

$$f(\hat{A}) = T^{-1} f(A) T \Rightarrow f(A) = T f(\hat{A}) T^{-1}$$

Questo fatto è molto comodo in quanto in alcuni casi:
 $\hat{A}$ diventa più semplice per cui, invece di calcolare $f(A)$,
 calcolo $f(\hat{A})$ e poi $f(A) = T f(\hat{A}) T^{-1}$.

Supponiamo, adesso, di avere una matrice diagonale a blocchi

$$A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m) = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ 0 & A_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & A_m \end{pmatrix}$$

Vogliamo calcolare la $f(A)$ di queste matrici dove f è
 una generica funzione. Facciamo vedere che è

$$f(\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m)) = \text{diag}(f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_m))$$

In fatti: una certa funzione matriciale $f(A)$ la possiamo sviluppare in serie e scrivere

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_k A^k + \dots =$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{pmatrix} a_1 + \begin{pmatrix} A_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_m^2 \end{pmatrix} a_2 +$$

$$+ \dots + \begin{pmatrix} A_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_m^k \end{pmatrix} a_k + \dots =$$

$$= \begin{pmatrix} e_0 I + A_1 A_1 + e_2 A_1^2 + \dots + e_K A_1^K + \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_0 I + \dots + e_K A_1^K & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_0 I + \dots + e_K A_1^K \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f(A_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(A_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(A_1) \end{pmatrix}$$

2d esempio

$$\text{sim} \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dim A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dim A_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dim A_3 \end{pmatrix}$$

$$e \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} e^{A_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{A_3 t} \end{pmatrix}$$