DECOMPOSIZIONE SPETTRALE DELLE MATRICI DI TRANSIZIONE

Supponiamo che la matrice dinamica A abbia μ autovalori reali distinti, λ_i, $i = 1, 2, \dots \mu$, e ν coppie distinte di autovalori complessi coniugati

$$\lambda_h = \alpha_h \pm j\omega_h = \rho_h e^{\pm j\vartheta_h} \quad h = 1, \dots \nu$$

Detti u_i gli autovettori corrispondenti agli autovalori reali λ_i; e $u_h = u_{ha} \pm j u_{hb}$ le coppie di autovettori corrispondenti alle coppie di autovalori complessi coniugati, avremo, nel caso discreto

$$\Phi(k) = A^k = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i^k u_i v_i^T + \sum_{h=1}^{\nu} \rho_h^k (u_{ha} \quad u_{hb}) \begin{pmatrix} \cos\vartheta_h k & \sin\vartheta_h k \\ -\sin\vartheta_h k & \cos\vartheta_h k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{ha}^T \\ v_{hb}^T \end{pmatrix}$$

mentre, nel caso continuo,

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{i=1}^{\mu} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T + \sum_{h=1}^{\nu} (u_{ha} \quad u_{hb}) e^{\alpha_h t} \begin{pmatrix} \cos\omega_h t & \sin\omega_h t \\ -\sin\omega_h t & \cos\omega_h t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{ha}^T \\ v_{hb}^T \end{pmatrix}$$

dove v_i, v_{ha}, v_{hb} sono i vettori della base reciproca della base costruita dagli autovettori linearmente indipendenti

$$(u_1, u_2, \dots, u_\mu, u_{1a}, u_{1b}, \dots, u_{\nu a}, u_{\nu b}) = T \qquad (1)$$

associati agli autovalori tutti distinti λ_i, $i = 1 \dots \mu$ reali e alle coppie tutte distinte di autovalori complessi coniugati:

$$\lambda_h = \alpha_h \pm \omega_h \qquad h = 1 \dots \nu$$

cioè v_i, v_{ha}, v_{hb} sono le righe della matrice

$$T^{-1} = (u_1, \dots u_\mu, u_{1a}, u_{1b}, \dots u_{\nu a}, u_{\nu b})^{-1} = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_\mu^T \\ v_{1a}^T \\ v_{1b}^T \\ \vdots \\ v_{\nu a}^T \\ v_{\nu b}^T \end{pmatrix}$$

Infatti, siccome stiamo considerando sistemi stazionari, facendo un cambiamento di base e assumendo come nuova base la (1), avremo

$$\hat{A} = T^{-1} A T$$

Facciamo vedere che, con questo cambiamento di base, con

$$T = (u_1 \dots u_\mu, u_{1a}, u_{1b}, \dots u_{\nu a}, u_{\nu b})$$

la matrice $\hat{A}$ viene diagonale

$$A u_i = \lambda_i u_i \quad , \quad A u_{h+} = A(u_{ha} + j u_{hb}) = \lambda_{h+} u_{h+} =$$

$$= (\alpha_h + j\omega_h)(u_{ha} + j u_{hb})$$

cioè

$$A u_{ha} = \alpha_h u_{ha} - \omega_h u_{hb}$$

$$A u_{hb} = \omega_h u_{ha} + \alpha_h u_{hb}$$

Allora possiamo scrivere

$$\hat{A} = T^{-1} A (u_1 \dots u_\mu, u_{1a}, u_{1b}, \dots u_{\nu a}, u_{\nu b}) =$$

DECOMPOSIZIONE SPETTRALE DELLE MATRICI DI TRANSIZ...

$$= T^{-1}(Au_1 \dots Au_\mu, Au_{1a}, Au_{1b}, \dots Au_{\nu a}, Au_{\nu b}) =$$

$$= T^{-1}(\lambda_1 u_1, \dots, \lambda_\mu u_\mu, (\alpha_1 u_{1a} - \omega_1 u_{1b}), (\omega_1 u_{1a} + \alpha_1 u_{1b}) \dots)$$

A questo punto ricordiamo la definizione di base reciproca di una base $T = (u_1 \dots u_m)$. La base reciproca V ci è data dalle righe di

$$T^{-1} = (u_1 \dots u_m)^{-1} = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{pmatrix}$$

La base reciproca è tale che le componenti di un vettore x, nella base $T = (u_1, \dots u_m)$, sono date da

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{pmatrix} x$$

ossia la base reciproca è tale che

$$c_1 = \langle v_1^T, x \rangle$$

$$\vdots$$

$$c_m = \langle v_m^T, x \rangle$$

Tornando al nostro problema avremo

$$\hat{A} = (T^{-1}\lambda_1 u_1, \dots, T^{-1}\lambda_\mu u_\mu, T^{-1}(\alpha_1 u_{1a} - \omega_1 u_{1b}), \dots T^{-1}(\omega_\nu u_{\nu a} + \alpha_\nu u_{\nu b} \dots$$

Per quanto abbiamo detto prima, $T^{-1}\lambda_i u_i$ è un vettore che ci dà proprio le componenti del vettore $\lambda_i u_i$ nella base T. Ma osservo che il vettore $\lambda_i u_i$, nella base T ha proprio per componenti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo, quindi, che i primi μ vettori colonna della matrice $\hat{A}$ sono

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \lambda_\mu & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right)$$

Occorre determinare i restanti vettori colonna della $\hat{A}$. A questo scopo, trovo che, per lo stesso motivo di prima, il vettore colonna

$$T^{-1}(\alpha_1 u_{1a} - \omega_1 u_{1b})$$

dà le componenti del vettore $(\alpha_1 u_{1a} - \omega_1 u_{1b})$ nella base T, ma le componenti di questo vettore sono proprio α_1 e $-\omega_1$, cioè

$$T^{-1}(\alpha_1 u_{1a} - \omega_1 u_{1b}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_1 \\ -\omega_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} u_1 \\ \vdots \\ \to u_\mu \\ \to u_{1a} \\ \to u_{1b} \\ \\ \vdots \\ \end{array}$$

Allo stesso modo

$$T^{-1}(\omega_1 u_{1a} + \alpha_1 u_{1b}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \omega_1 \\ \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trovo allora

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & & & \\ 0 & & & \lambda_\mu & 0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & & 0 & \alpha_1 & \omega_1 & \cdots & & \\ 0 & 0 & & 0 & -\omega_1 & \alpha_1 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_\nu & \omega_\nu \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\omega_\nu & \alpha_\nu \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu, \begin{pmatrix} \alpha_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} \alpha_\nu & \omega_\nu \\ -\omega_\nu & \alpha_\nu \end{pmatrix}\right)$$

In questo modo, invece di calcolare $f(A)$ ci calcoleremo $f(\hat{A})$ molto più semplicemente, dopo di che

$$f(A) = T\, f(\hat{A})\, T^{-1}$$

Nel caso continuo a noi interessa calcolare $f(A) = e^{At}$. Allora

$$\Phi(t) = e^{At} = T e^{\hat{A}t} T^{-1} =$$

$$= (u_1, \dots, u_\mu, u_{1a}, u_{1b}, \dots, u_{\nu a}, u_{\nu b}) \times \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & e^{\lambda_\mu t} & & \\ & & & e^{\begin{pmatrix}\alpha_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \alpha_1\end{pmatrix}t} & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & e^{\begin{pmatrix}\alpha_\nu & \omega_\nu \\ -\omega_\nu & \alpha_\nu\end{pmatrix}t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_\mu^T \\ v_{1a}^T \\ v_{1b}^T \\ \vdots \\ v_{\nu a}^T \\ v_{\nu b}^T \end{pmatrix}$$

Facendo il prodotto, avremo

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{i=1}^{\mu} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T + \sum_{h=1}^{\nu} (u_{ha}\ u_{hb})\, e^{\begin{pmatrix}\alpha_h & \omega_h \\ -\omega_h & \alpha_h\end{pmatrix}t} \begin{pmatrix} v_{ha}^T \\ v_{hb}^T \end{pmatrix}$$

A questo punto, però, osserviamo che

$$e^{\begin{bmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{bmatrix} t} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

Infatti la funzione

$$\Phi(t) = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

la posso vedere come la matrice di transizione di un sistema stazionario in cui la matrice dinamica è proprio

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

cioè il sistema è $\dot{x} = Ax$. Infatti la $\Phi(t)$ verifica proprio le due proprietà della funzione di transizione $\Phi(t)$

$$\begin{cases} \Phi(0) = I \\ \dot{\Phi}(t) = A\,\Phi(t) \end{cases}$$

Infatti:

$$e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} \Bigg|_{t=0} = I$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}\right] = \alpha e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix} +$$

$$+ e^{\alpha t}\begin{pmatrix}-\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t\\ -\omega\cos\omega t & -\omega\sin\omega t\end{pmatrix} =$$

$$= e^{\alpha t}\left\{\alpha\begin{pmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t\\ -\omega\cos\omega t & -\omega\sin\omega t\end{pmatrix}\right\} =$$

$$= e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\alpha\cos\omega t - \omega\sin\omega t & \alpha\sin\omega t + \omega\cos\omega t\\ -\alpha\sin\omega t - \omega\cos\omega t & \alpha\cos\omega t - \omega\sin\omega t\end{pmatrix} =$$

$$= e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\alpha & \omega\\ -\omega & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}$$

In definitiva, poichè $\Phi(t)$ è tale che

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t) = A\,\Phi(t) = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} \Phi(t) \\ \Phi(0) = I \end{cases}$$

vuol dire che $\Phi(t)$ è proprio la matrice di transizione di un sistema stazionario $\dot{x} = Ax$ dove A è proprio $\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$ che noi sappiamo già che la matrice di transizione di un sistema stazionario di matrice dinamica A è

$$\Phi(t) = e^{At} = e^{\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} t}$$

cioè

$$e^{\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

Possiamo, alla fine, scrivere

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{i=1}^{\mu} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T + \sum_{h=1}^{\nu} (u_{ha} \;\; u_{hb})\, e^{\alpha_h t} \begin{pmatrix} \cos \omega_h t & \sin \omega_h t \\ -\sin \omega_h t & \cos \omega_h t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{ha}^T \\ v_{hb}^T \end{pmatrix}$$

Per i sistemi a tempo discreto troveremo analogamente

$$\Phi(k) = A^k$$

ma, invece di calcolarci direttamente A^k, faremo un cambiamento di ~~variabili~~ base ottenendo una nuova matrice

$$\hat{A} = T^{-1} A T,$$

dopo di che $A^k = T \hat{A}^k T^{-1}$.

Come abbiamo già dimostrato prima

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_\mu & & & \\ & & & \begin{pmatrix} \alpha_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \begin{pmatrix} \alpha_\nu & \omega_\nu \\ -\omega_\nu & \alpha_\nu \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}^k = \mathrm{diag}\left(\lambda_1^k, \dots, \lambda_\mu^k, \begin{pmatrix} \alpha_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}^k, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_\nu & \omega_\nu \\ -\omega_\nu & \alpha_\nu \end{pmatrix}^k\right)$$

Dopo di che ci calcoliamo

$$A^K = T \hat{A}^K T^{-1} = \left(u_1, u_2, \dots, u_\mu, u_{1a}, u_{1b}, \dots, u_{\nu a}, u_{\nu b} \right) \cdot$$

$$= \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i^K u_i v_i^T + \sum_{h=1}^{\nu} \left(u_{ha} \; u_{hb} \right) \begin{pmatrix} \alpha_h & \omega_h \\ -\omega_h & \alpha_h \end{pmatrix}^K \begin{pmatrix} v_{ha}^T \\ v_{hb}^T \end{pmatrix}$$

A questo punto, per lo stesso motivo di prima trovo che

$$\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}^K = \rho^K \begin{pmatrix} \cos\vartheta_K & \sin\vartheta_K \\ -\sin\vartheta_K & \cos\vartheta_K \end{pmatrix}$$

dove $\rho = \sqrt{\alpha^2+\omega^2}$ $\quad \vartheta = tg^{-1} \dfrac{\omega}{\alpha}$

$$
\begin{pmatrix}
\lambda_1^K & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \lambda_2^K & \cdots & 0 & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & \lambda_\mu^K & & & \\
 & & & & \begin{pmatrix}\alpha_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \alpha_1\end{pmatrix}^K & & \\
 & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & \begin{pmatrix}\alpha_\nu & \omega_\nu \\ -\omega_\nu & \alpha_\nu\end{pmatrix}^K
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
v_1^T \\ \vdots \\ v_\mu^T \\ v_{1a}^T \\ v_{1b}^T \\ \vdots \\ v_{\nu b}^T
\end{pmatrix}
$$

Infatti: ricordo che la matrice di transizione di un sistema discreto stazionario

$$x(K+1) = A\,x(K)$$

è data da $\Phi(K) = A^K$ e verifica le due proprietà

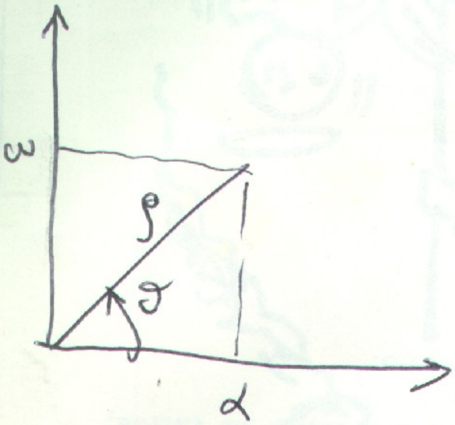
$$\Phi(0) = I$$

$$\Phi(K+1) = A\,\Phi(K)$$

e infatti

$$\begin{pmatrix}\alpha & \omega \\ -\omega & \alpha\end{pmatrix} \rho^K \begin{pmatrix}\cos\vartheta K & \sin\vartheta K \\ -\sin\vartheta K & \cos\vartheta K\end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix}\cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta\end{pmatrix} \rho^K \begin{pmatrix}\cos\vartheta K & \sin\vartheta K \\ -\sin\vartheta K & \cos\vartheta K\end{pmatrix}$$

Infatti:



$$\alpha = \rho \cos\vartheta$$

$$\omega = \rho \sin\vartheta$$

$$= \rho^{k+1} \begin{pmatrix} \cos\vartheta(k+1) & \sin\vartheta(k+1) \\ -\sin\vartheta(k+1) & \cos\vartheta(k+1) \end{pmatrix} = \Phi(k+1)$$

Ho allora ottenuto che

$$\Phi(k+1) = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} \Phi(k)$$

Inoltre

$$\Phi(0) = I$$

Allora vuol dire che

$$\rho^{k} \begin{pmatrix} \cos\vartheta k & \sin\vartheta k \\ -\sin\vartheta k & \cos\vartheta k \end{pmatrix}$$

è propio la matrice di transizione del sistema la cui matrice dinamica è

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

che noi già sappiamo che, per il sistema $x(k+1) = A(k)x($

la matrice di transizione è

$$\Phi(k) = A^k$$

quindi dovrà essere

$$\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}^k = \rho^k \begin{pmatrix} \cos\theta k & \sin\theta k \\ -\sin\theta k & \cos\theta k \end{pmatrix}$$

per cui

$$\Phi(k) = A^k = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i^k u_i v_i^T + \sum_{h=1}^{\nu} (u_{ha}\ u_{hb})\, \rho_h^k \begin{pmatrix} \cos\theta_h k & \sin\theta_h k \\ -\sin\theta_h k & \cos\theta_h k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{\ldots} \\ v_{\ldots} \end{pmatrix}$$

ESEMPIO

Consideriamo il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

L'evoluzione libera del sistema è

$$x(t) = \Phi(t)\, x_0 = e^{At} x_0$$

ma

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{2} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T = e^{\lambda_1 t} u_1 v_1^T + e^{\lambda_2 t} u_2 v_2^T$$

Occorre determinare gli autovettori u_1 e u_2

$$\begin{cases} A u_1 = \lambda_1 u_1 \\ A u_2 = \lambda_2 u_2 \end{cases}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$(\lambda_1 I - A)\, u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\right\} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & \cancel{3}\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo una sola eq. in quanto la seconda dipende dalla 1ª

$$-u_{11} - u_{12} = 0 \qquad \text{se } u_{11} = 1 \Rightarrow u_{12} = -1$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_2 I - A)\, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ 2 & \lambda_2 + 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2u_{21} - u_{22} = 0$$

$$u_{21} = 1 \qquad u_{22} = -2$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{At} x_0 = e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-2t} \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$x_1(t) = 8e^{-t} - 6e^{-2t}$$

$$x_2(t) = -8e^{-t} + 12e^{-2t}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -1+1 \\ & -1+2 \end{pmatrix}$$