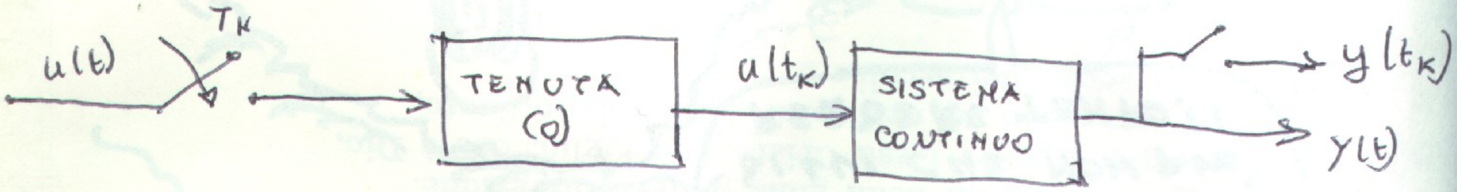
SISTEMI A DATI CAMPIONATI

I sistemi a dati campionati sono dei sistemi comandati da un ingresso costante a tratti mentre l'uscita è continua. Se vogliamo anche l'uscita discreta, possiamo valutarla solo in certi istanti, ad esempio con un tasto. Un simile sistema è schematizzabile in questo modo



Vediamo, allora, come questo sistema a tempo continuo, sollecitato da dati campionati, può essere descritto mediante equazioni. Il sistema continuo è descritto dalle seguenti equazioni

$$(I) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \\ y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t) \end{cases}$$

Se poniamo nella forma esplicita delle (I)

$$x(t) = \Phi(t,t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} H(t,\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

$$t = (K+1)T \qquad , \qquad t_0 = KT$$

otteniamo

$$x((K+1)T) = \Phi((K+1)T, KT)\,x(KT) + \int_{KT}^{(K+1)T} H((K+1)T,\tau)\,d\tau \;\, u(KT)$$

avendo supposto l'ingresso costante in $[KT, (K+1)T]$ e pari a $u(KT)$. Supponendo, allora, in un generico intervallo $[KT, (K+1)T]$ l'ingresso costante e pari ad $u(K)$, il nostro sistema a dati campionati, cioè continuo ma sollecitato da un ingresso costante a tratti, diventa

$$x(K+1) = A_d\, x(K) + B_d\, u(K)$$
$$y(K) = C\, x(K) + D\, u(K)$$

dove

$$A_d = \Phi((K+1)T, KT)$$

$$B_d = \int_{KT}^{(K+1)T} H((K+1)T, \tau)\, d\tau$$

mentre le matrici C e D non sono cambiate.

Se il sistema è sempre lineare ma stazionario

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

il sistema a dati campionati che si ottiene è il seguente

$$x(K+1) = A_d\, x(K) + B_d\, u(K)$$
$$y(K) = C\, x(K) + D\, u(K)$$

$$(K+1)T - \tau = \delta$$
$$d\delta = -d\tau$$
$$\tau = KT \Rightarrow \delta = T$$
$$\tau = (K+1)T \Rightarrow \delta = 0$$

dove $A_d = e^{AT}$

$$B_d = \int_{KT}^{(K+1)T} e^{A((K+1)T-\tau)} B\, d\tau = -\int_{T}^{0} e^{A\delta}\, d\delta\, B =$$

$$= A^{-1}\left[e^{AT} - I\right] B$$

Infatti, per i sistemi stazionari

$$\Phi((K+1)T, KT) = \Phi(T, 0) = e^{AT} = A_d$$

mentre

$$B_d = \int_{KT}^{(K+1)T} H((K+1)T, \tau)d\tau = \int_0^T \Phi((K+1)T-\tau)B\,d\tau =$$

$$= \int_0^T e^{A((K+1)T-\tau)} B\,d\tau \qquad \text{ponendo } (K+1)T-\tau=\delta \qquad d\tau=-d\delta$$

$$\int_0^T e^{A((K+1)T-\tau)} B\,d\tau = -\int_{(K+1)T}^{KT} e^{A\delta} B\,d\delta = -\int_T^0 e^{A\delta} B\,d\delta = \int_0^T e^{A\delta}\,d\delta\, B =$$

$$= A^{-1}\left[e^{AT} - I\right]B$$

ESEMPIO

Consideriamo il seguente sistema a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

scelgo $T = 0{,}25$ s

voglio trovare il sistema a dati campionati associato a questo sistema a tempo continuo

$$A_d = e^{AT} = e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} 0,25}$$

$$P(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = -1 \\ \searrow \lambda_2 = -2 \end{matrix}$$

$$e^{AT} = u_1 v_1^T e^{-T} + u_2 v_2^T e^{-2T}$$

Gli autovettori saranno

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{pmatrix}$$

$$e^{AT} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (2 \quad 1) e^{-T} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} (-1 \quad -1) e^{-2T} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} e^{-T} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} e^{-2T}$$

$$A_d = e^{AT} = \begin{pmatrix} 2e^{-0,25} - e^{-0,5} & e^{-0,25} - e^{-0,5} \\ -2e^{-0,25} + 2e^{-0,5} & -e^{-0,25} + 2e^{-0,5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,951 & 0,172 \\ 0,344 & 0,434 \end{pmatrix}$$

$$B_d = \int_0^{0,25} e^{-A\tau} B\, d\tau = \int_0^{0.25} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} e^{-t} \quad - e^{-2t} \\ -\frac{3}{2} e^{-t} \quad + 2e^{-2t} \end{pmatrix} dt =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} e^{-t} \quad \frac{1}{2} e^{-2t} \\ \frac{3}{2} e^{-t} \quad - e^{-2t} \end{pmatrix} \Bigg|_0^{0.25} = \begin{pmatrix} 0.1351 \\ 0.0617 \end{pmatrix}$$

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0.951 & 0.172 \\ -0.344 & 0.434 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0.135 \\ 0.061 \end{pmatrix} u(k)$$

MODI NATURALI

Adesso analizziamo le leggi temporali con cui si evolve lo stato in regime libero nel caso di sistema lineare e stazionario. Analizziamo prima il caso continuo. Ricordiamo che, nel caso in cui la matrice dinamica ha tutti valori distinti, l'evoluzione libera nello stato vale

$$x(t)=\sum_{i=1}^{\mu} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T x_0 + \sum_{h=1}^{\nu} (u_{ha}\ u_{hb})\, e^{\alpha_h t}\begin{pmatrix}\cos\omega_h t & \sin\omega_h t\\ -\sin\omega_h t & \cos\omega_h t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{ha}^T\\ v_{hb}^T\end{pmatrix} x_0$$

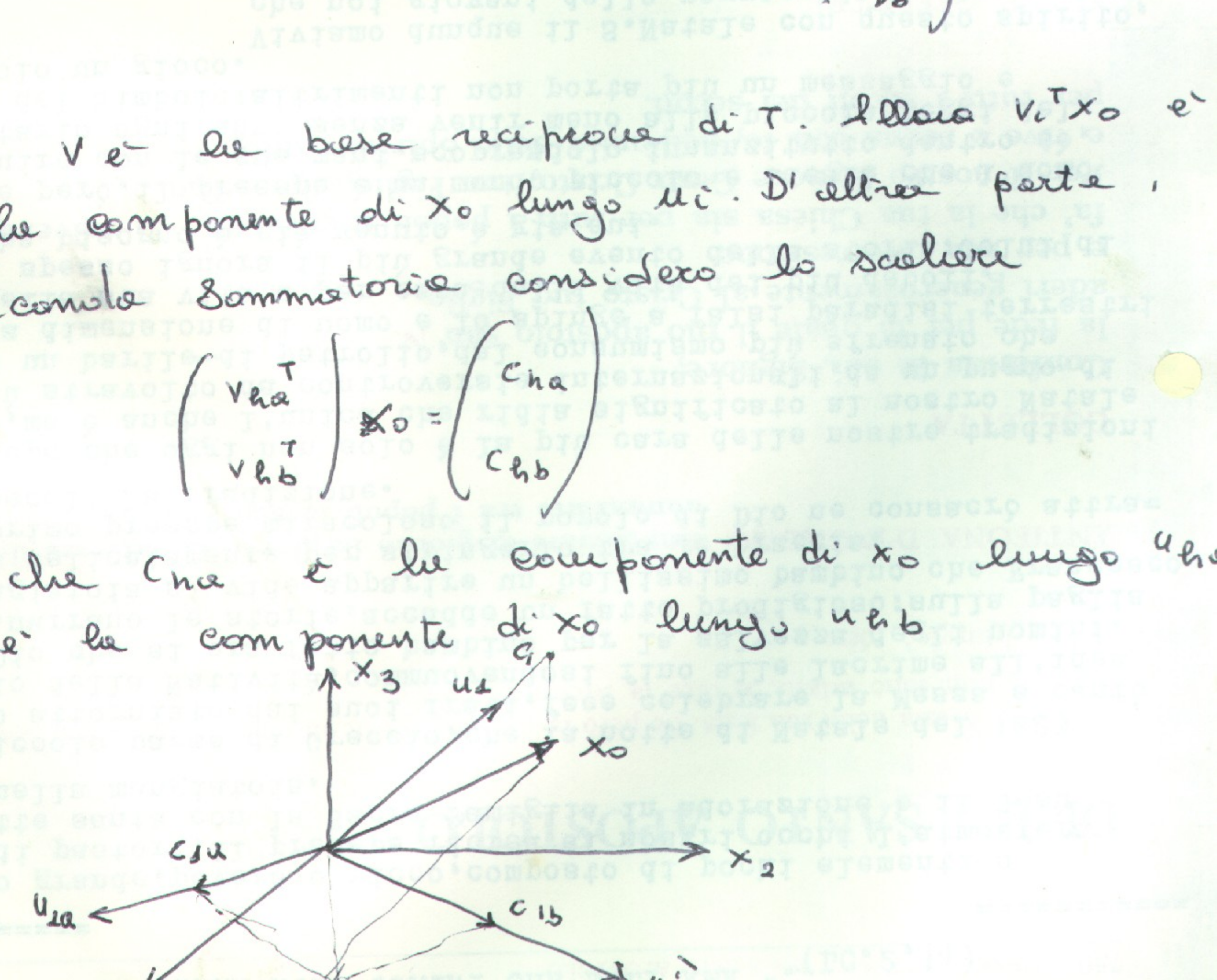
Considero lo scalare $v_i^T x_0 = c_i$: vediamo qual è il significato fisico di c_i. Ricordiamo che le v_i sono le righe della matrice

$$T^{-1} = (u_1 \dots u_\mu, u_{1a}, u_{1b} \dots, u_{\nu a}, u_{\nu b})^{-1} = \begin{pmatrix} v_1^T\\ \vdots \\ v_{\nu a}^T \\ v_{\nu b}^T\end{pmatrix}$$

e quindi V è la base reciproca di T. Allora $v_i^T x_0$ è proprio la componente di x_0 lungo u_i. D'altra parte, nella seconda sommatoria considero lo scalare

$$\begin{pmatrix} v_{ha}^T\\ v_{hb}^T\end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} c_{ha}\\ c_{hb}\end{pmatrix}$$

Abbiamo che c_{ha} è la componente di x_0 lungo u_{ha} e c_{hb} è la componente di x_0 lungo u_{hb}



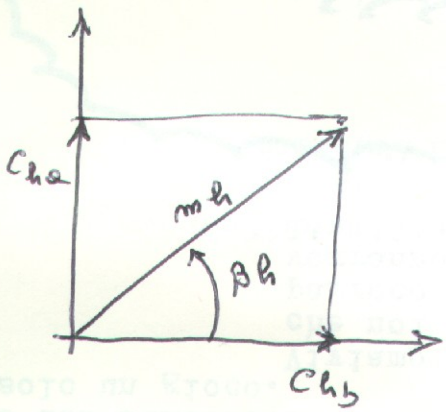
Con queste posizioni possiamo scrivere

$$x_e(t) = \sum_{i=1}^{\mu} c_i e^{\lambda_i t} u_i + \sum_{h=1}^{\nu} (u_{ha} \; u_{hb}) e^{\alpha_h t} \begin{pmatrix} \cos\omega_h t \, c_{ha} + \sin\omega_h t \, c_{hb} \\ -\sin\omega_h t \, c_{ha} + \cos\omega_h t \, c_{hb} \end{pmatrix}$$

Consideriamo nel piano complesso il fasore

$$c_{hb} + j c_{ha} = m_h e^{j\beta_h}$$

dove $m_h = \sqrt{c_{ha}^2 + c_{hb}^2}$ è il modulo e $\beta_h = \begin{cases} \sin^{-1}(c_{ha}/m_h) \\ \cos^{-1}(c_{hb}/m_h) \end{cases}$ la fase



$$c_{ha} = m_h \sin\beta_h$$

$$c_{hb} = m_h \cos\beta_h$$

$$(u_{ha} \; u_{hb}) e^{\alpha_h t} \begin{pmatrix} \cos\omega_h t (m_h \sin\beta_h) + \sin\omega_h t (m_h \cos\beta_h) \\ -\sin\omega_h t (m_h \sin\beta_h) + \cos\omega_h t (m_h \cos\beta_h) \end{pmatrix} =$$

$$= m_h (u_{ha} \; u_{hb}) e^{\alpha_h t} \begin{pmatrix} \sin(\omega_h t + \beta_h) \\ \cos(\omega_h t + \beta_h) \end{pmatrix} =$$

$$= m_h \left[u_{ha} e^{\alpha_h t} \sin(\omega_h t + \beta_h) + u_{hb} e^{\alpha_h t} \cos(\omega_h t + \beta_h) \right]$$

allora

$$x_e(t) = \sum_{i=1}^{\mu} c_i e^{\lambda_i t} u_i + \sum_{h=1}^{\nu} m_h \left[u_{ha} e^{\alpha_h t} \sin(\omega_h t + \beta_h) + u_{hb} e^{\alpha_h t} \cos(\omega_h t + \beta_h) \right]$$

Quindi l'evoluzione libera dello stato è una combinazione lineare di termini del tipo

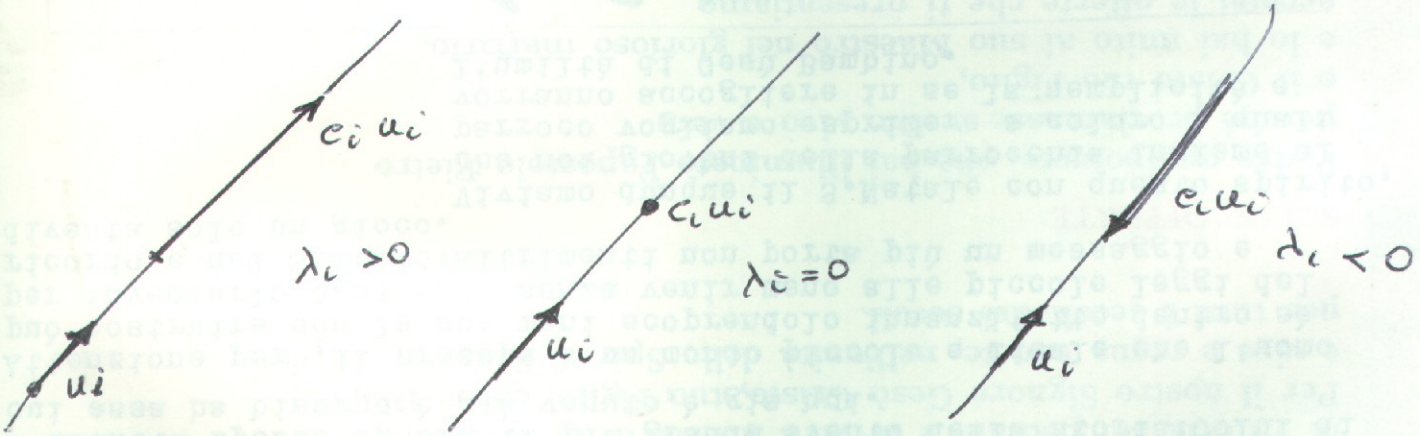
$e^{\lambda_i t} u_i$ e/o $e^{\alpha_n t} u_{na} \sin(\omega_n + \beta_n) + e^{\alpha_n t} u_{nb} \cos(\omega_n t + \beta_n)$

Quando cambiano le CI questi termini restano costanti, l'unica cosa che cambia sono i coefficienti.

Questi termini sono chiamati MODI NATURALI.

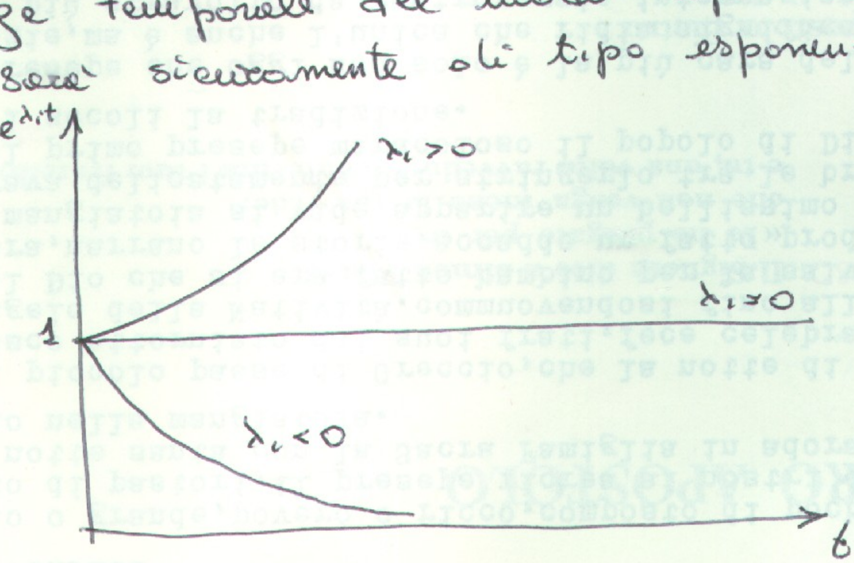
I modi del tipo $e^{\lambda_i t} u_i$

sono detti modi aperiodici del sistema e la loro traiettoria è vincolata ad appartenere alla retta individuata dell'autovettore u_i



La legge temporale del modo aperiodico dipende da $e^{\lambda_i t}$

Essa sarà sicuramente di tipo esponenziale



Il modo sarà allora nel tempo

- convergente se $\lambda_i < 0$
- costante se $\lambda_i = 0$
- divergente se $\lambda_i > 0$

Spesso la legge temporale del modo viene scritta nella seguente forma

$$e^{-t/\tau_i}$$

con $\tau_i = -\frac{1}{\lambda_i}$ = costante di tempo. Le costanti di tempo sono dei parametri caratteristici del sistema. Esse consentono di avere subito un'idea della durata dei modi e quindi dell'evoluzione libera. Se $\lambda_i < 0$ e aspetto un tempo $t = 4{,}6\,\tau_i$ l'ampiezza del modo diventa 1/100 del valore iniziale. Infatti

$$e^{-\frac{4{,}6\,\tau_i}{\tau_i}} = e^{-4{,}6} \simeq \frac{1}{100}$$

cioè, dopo un tempo pari a 4,6 volte τ il modo non c'è più.

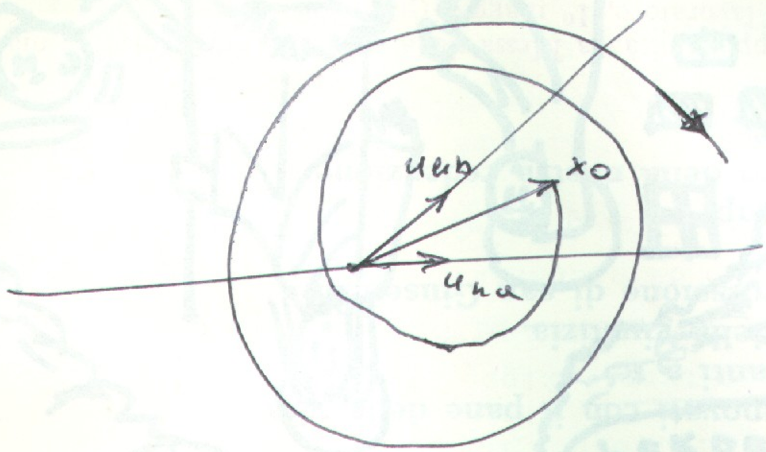
Mentre agli autovalori reali corrispondono i modi aperiodici, alle coppie di autovalori complessi corrispondono i modi pseudoperiodici del tipo

$$e^{\alpha_h t} \sin(\omega_h t + \beta_h)\, u_{ha} + e^{\alpha_h t} \cos(\omega_h t + \beta_h)\, u_{hb}$$

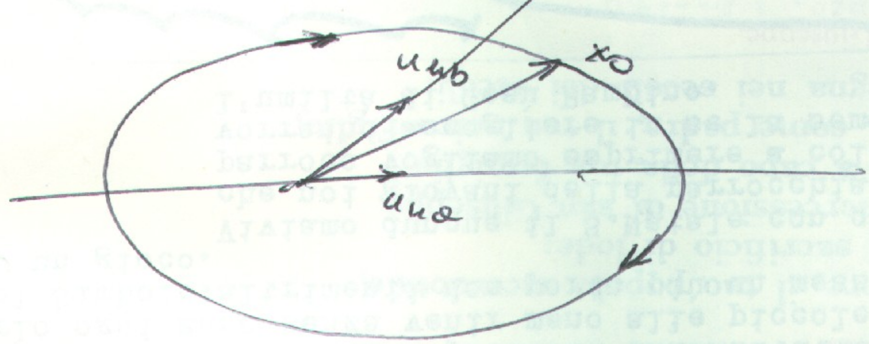
La loro traiettoria è vincolata ad appartenere al piano individuato dai vettori u_{ha} e u_{hb}.

Il modo si mantiene sempre su questo piano partendo da x_0.

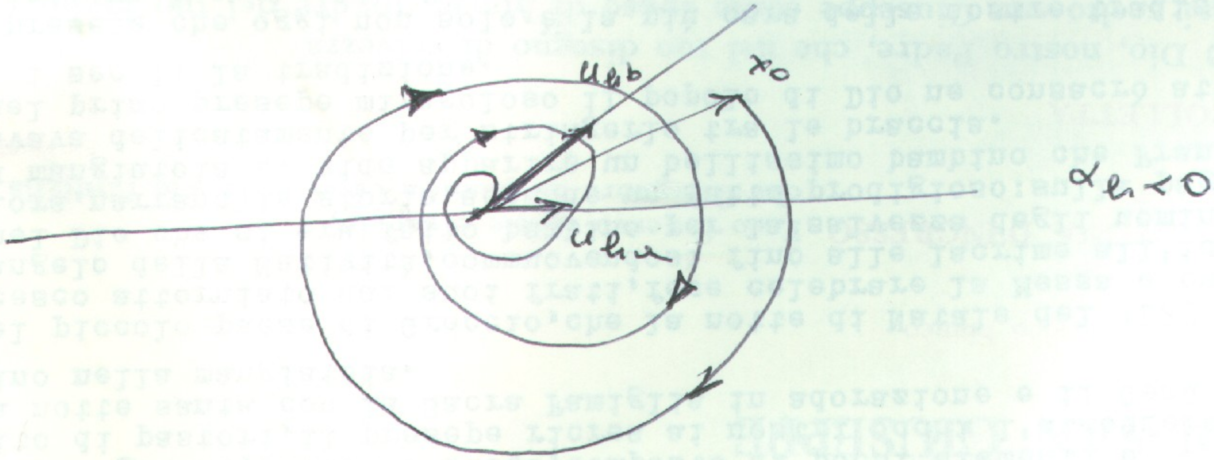
Se $\alpha_h > 0$ il modo è divergente, avremo, quindi, che il modo sarà una spirale divergente



Se $\alpha_h = 0$ il modo è costante o periodico in quanto viene descritto da una ellisse



Se $\alpha_h < 0$ il modo è convergente o smorzato e la traiettoria sarà una spirale convergente



Fino ad adesso abbiamo visto la traiettoria di tali modi pseudoperiodici. Vogliamo vedere adesso la legge temporale con cui tali traiettorie vengono percorse. La legge generica componente del modo

$$x_{h_l}(t) = \left[e^{\alpha_h t}\sin(\omega_h t+\beta_h)u_{ha} + e^{\alpha_h t}\cos(\omega_h t+\beta_h)u_{hb}\right]\cdot m_h$$

evolve nel tempo mediante una legge di questo tipo

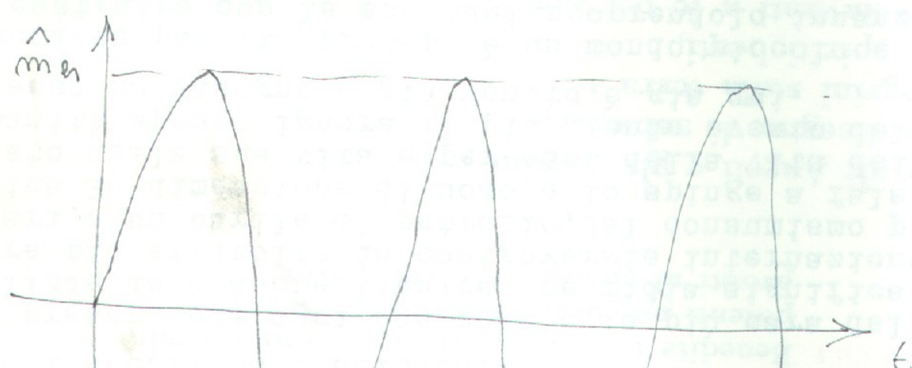
$$x_{hl}(t) = \hat{m}_h e^{\alpha_h t}\sin(\omega_h t+\hat{\beta}_h)$$

avendo messo in evidenza $e^{\alpha_h t}$ e avendo sommato i due termini sinusoidali. Osservo allora che se

$\alpha_h=0$, la legge temporale è una legge sinusoidale

$$\hat{m}_h \sin(\omega_h t+\hat{\beta}_h)$$

e il modo è periodico



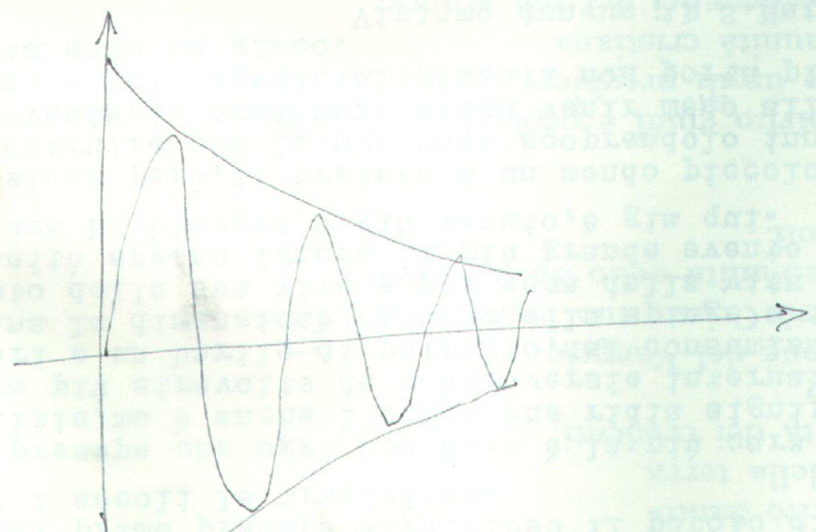
Se $\alpha_h>0$ la legge temporale è

$$\hat{m}_h e^{\alpha_h t}\sin(\omega_h t+\hat{\beta}_h)$$

e il modo è oscillatorio divergente

$\alpha_h < 0$, la legge temporale è $\hat{m}_h e^{\alpha_h t} \sin(\omega_h t + \hat{\beta}_h)$

il modo è oscillatorio convergente



Quando il modo è convergente esso si estingue dopo un tempo pari a 4,6 volte la costante di tempo τ

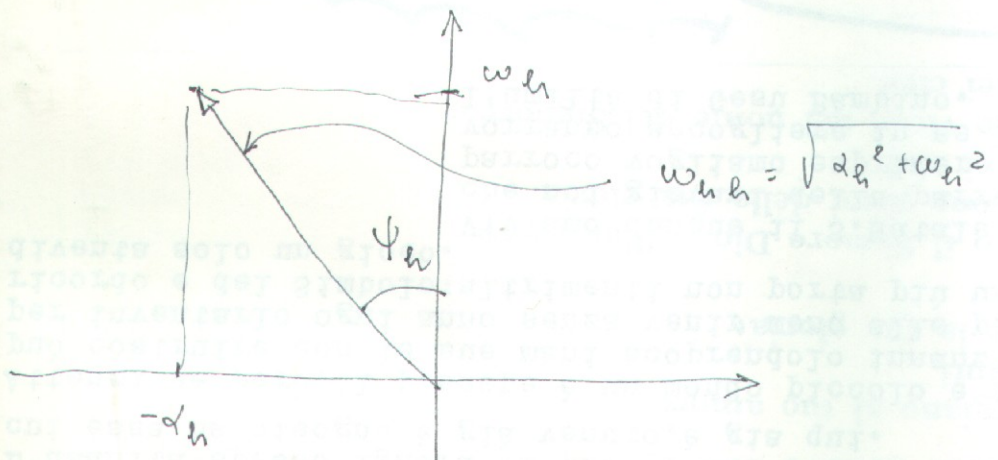
$$\tau = -\frac{1}{\alpha_h}$$

Oltre alla costante di tempo, per i modi pseudo periodici

- pulsazione ω_h
- frequenza $f_h = \frac{\omega_h}{2\pi}$
- periodo $T_h = \frac{2\pi}{\omega_h}$
- pulsazione naturale $\omega_{nh} = \sqrt{\alpha_h^2 + \omega_h^2}$

Abbiamo anche un altro parametro ξ_h detto coefficiente di smorzamento del sistema definito nel seguente modo

$$\xi_h = \frac{-\alpha_h}{\omega_{nh}} = -\frac{\alpha_h}{\sqrt{\alpha_h^2 + \omega_h^2}} = \sin \varphi_h$$



Mentre la costante di tempo τ ci dice quanto tempo impiega il modo per estinguersi, il coefficiente di smorzamento ξ_h ci dà una idea di quante oscillazioni fa il modo prima di estinguersi. Infatti

$$\xi_h = \frac{-\alpha_h}{\omega_{nh}} = \sin \varphi_h = \frac{1}{\tau_h} \cdot \frac{T}{2\pi}$$

per cui se ξ_h è piccolo, vuol dire che T è piccolo rispetto al periodo di transitorio τ_h, per cui il modo fa parecchie oscillazioni prima di estinguersi.

MODI NATURALI PER SISTEMI DISCRETI

Quello detto per i sistemi continui vale anche per i sistemi discreti. Ricordiamo, sempre che, nel caso in cui la matrice dinamica ha tutti autovalori distinti, l'evoluzione libera nello stato è

$$x(k) = \Phi(k)\, x_0 = A^k x_0 =$$

$$= \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i^k u_i v_i^T x_0 + \sum_{h=1}^{\nu} (u_{ha} \;\; u_{hb})\, \rho_h^k \begin{pmatrix} \cos\theta_h k & \sin\theta_h k \\ -\sin\theta_h k & \cos\theta_h k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{ha}^T \\ v_{hb}^T \end{pmatrix} x_0$$

osserviamo che:

$$\lambda_i^k = (\operatorname{sign} \lambda_i)^k |\lambda_i|^k = (\operatorname{sign} \lambda_i)^k e^{(\log|\lambda_i|)\cdot k}$$

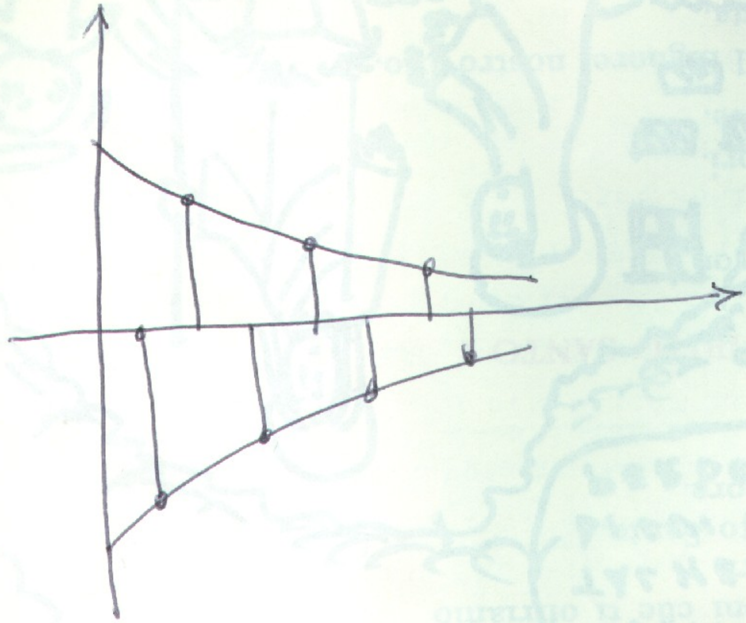
$$\rho_h^k = e^{(\log \rho_h) k}$$

Allora, per $x(k)$, possiamo avere una formula analoga al caso continuo

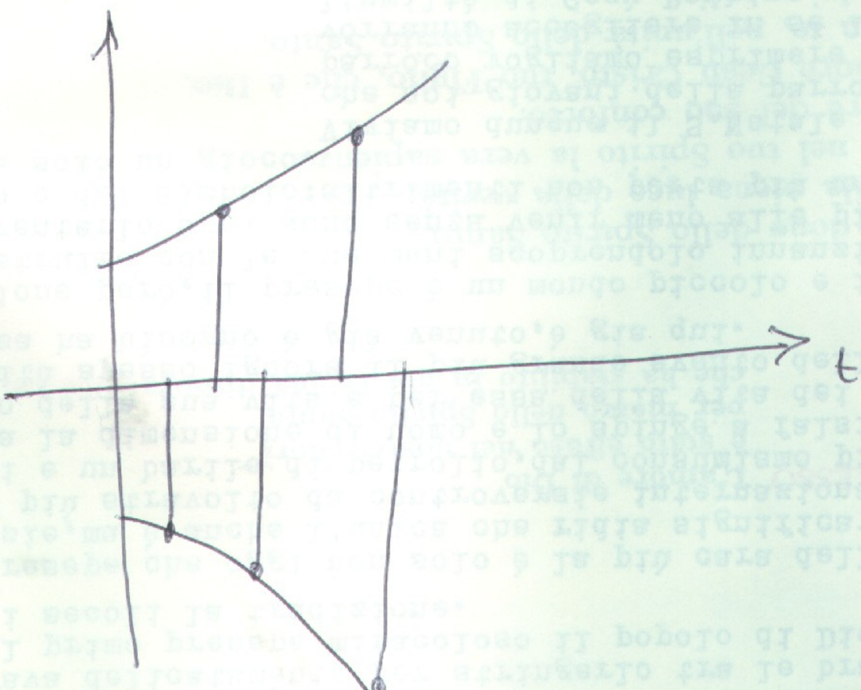
$$x(k) = \sum_{i=1}^{\mu} (\operatorname{sign} \lambda_i)^k e^{(\log|\lambda_i|)\cdot k} u_i v_i^T x_0 + \sum_{h=1}^{\nu} (u_{ha} \;\; u_{hb})\, e^{(\log \rho_h) k} \overbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta_h k & \sin\theta_h k \\ -\sin\theta_h k & \cos\theta_h k \end{pmatrix}}^{2\times 2} \overbrace{\begin{pmatrix} v_{ha}^T \\ v_{hb}^T \end{pmatrix}}^{2\times 1} x_0$$

Consideriamo il caso in cui vi sono solo autovalori reali. Osserva che, in questo caso, se $\lambda_i < 1$, la legge temporale sarà un esponenziale negativo

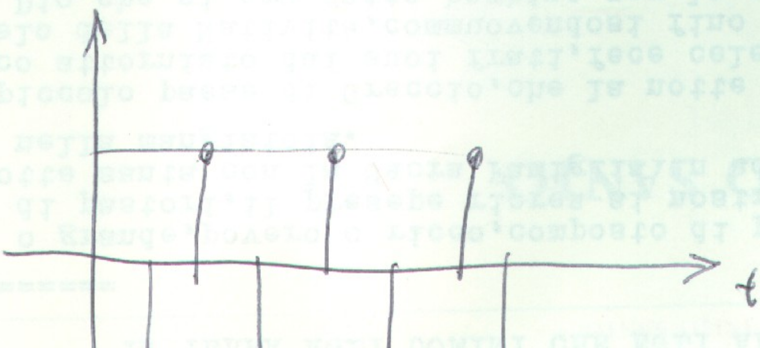
$\lambda_i < 0 \quad |\lambda_i| < 1$



$\lambda_i < 0 \quad |\lambda_i| > 1$

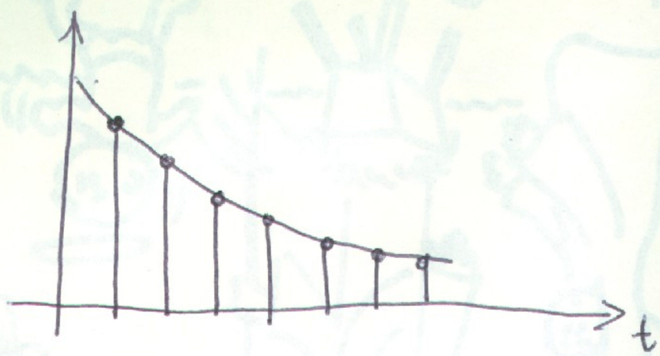


$\lambda_i < 0 \quad |\lambda_i| = 1$

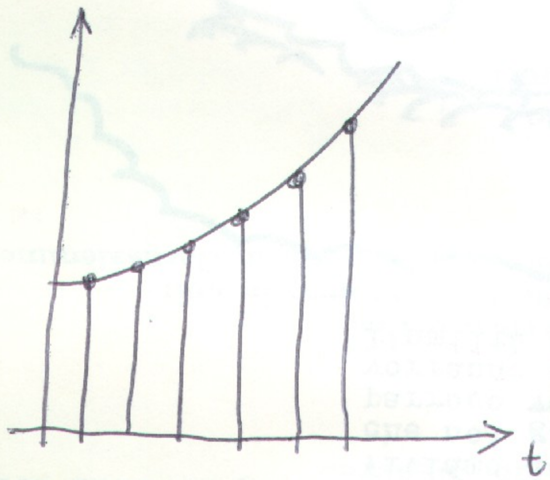


$\log|\lambda_i|<0$ se $|\lambda_i|<1$

modo convergente



Se, invece, $|\lambda_i|>1$, $\log|\lambda_i|>0$ allora la legge temporale è un esponenziale positivo



modo divergente

Se, invece, $|\lambda_i|=1$ allora $\log|\lambda_i|=0$ e il modo è costante

Siccome $\lambda_i^k = (\mathrm{sign}\,\lambda_i)^k e^{(\log|\lambda_i|)k}$, nel caso in cui $\lambda_i<0$, bisogna tener conto anche del segno. Allora per $\lambda_i<0$ il modo sarà alternante cioè una volta positivo e una volta negativo a seconda di k

Possiamo adesso definire due costante di tempo

$$\tau_i = -\frac{1}{\log|\lambda_i|}$$

e il modo si estingue dopo un tempo pari a $4 \div 5$ volte la max costante di tempo

$$\tau_{max} = \frac{1}{\min(-\log|\lambda_i|)}$$

Vediamo, adesso, il caso in cui gli autovalori sono complessi coniugati. Dobbiamo analizzare il segno dell'esponenziale

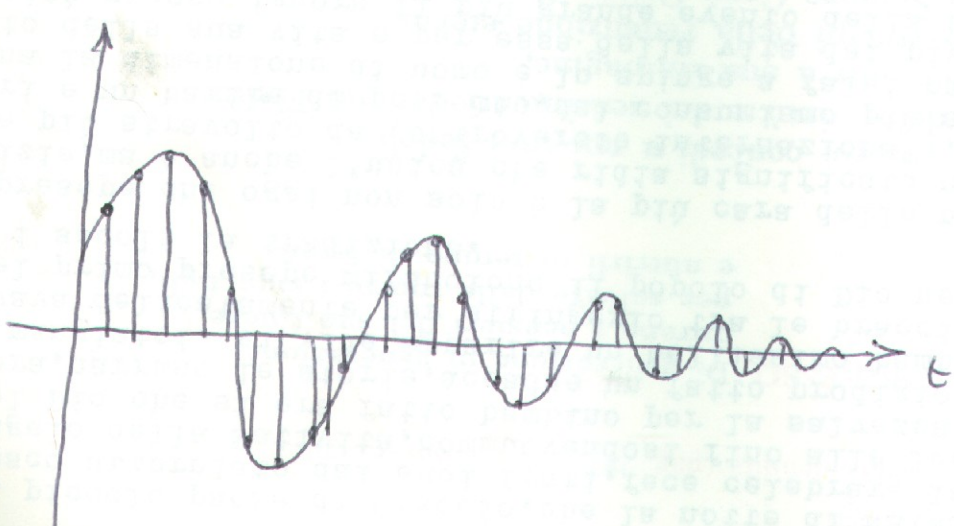
$$e^{(\log \rho_h)k}$$

In questo caso la legge temporale del moto è, per la generica componente, la seguente:

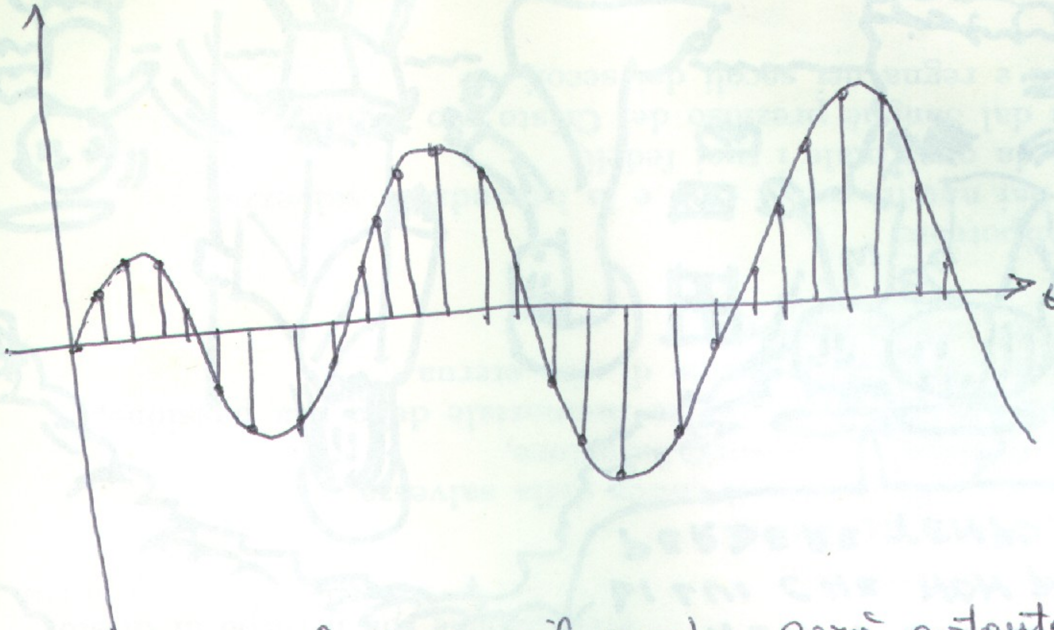
$$x_{hl}(k) = \left[e^{(\log \rho_h)k} \sin(\theta_h k + \varphi_h) u_{ha} + e^{(\log \rho_h)k} \cos(\theta_h k + \varphi_h) u_{hb} \right] m_h$$

$$x_{hl}(k) = e^{(\log \rho_h)k} \hat{m}_h \cos(\theta_h k + \hat{\varphi}_h)$$

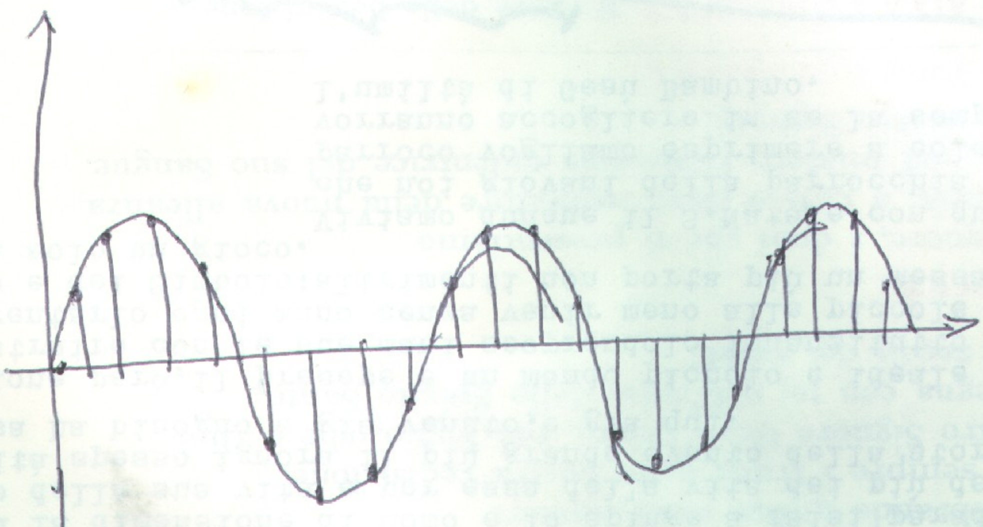
Se $\rho_h < 1$, $\log \rho_h < 0$. Il moto sarà oscillatorio convergente



se $\rho_n > 1$, il modo sarà oscillatorio ~~di~~ divergente



Se, invece, $\rho_n = 1$, $\log 1 = 0$, il modo sarà costante e periodico



Possiamo dire che il modo è convergente se gli autovalori sono interni al cerchio di raggio unitario centrato nell'origine, è divergente se sono esterni ad esso, è costante se gli autovalori si trovano su di esso.

EVOLUZIONE LIBERA IN USCITA

Ricordiamo che l'evoluzione libera in uscita è data, sempre nell'ipotesi di sistemi stazionari, dalla seguente espressione:

nel caso continuo $y_e(t) = C\,\Phi(t)\,x_0$

nel caso discreto $y_e(k) = C\,\Phi(k)\,x_0$

Possiamo dire, allora, che la risposta libera in uscita è la stessa di quella nello stato, tranne per il fatto che dobbiamo moltiplicare per C

$$y_e = C \cdot x_e$$

cioè

$$y_e = C\,x_e = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \end{pmatrix} = c_1 x_{1e} + c_2 x_{2e}$$

quindi anche l'uscita è una combinazione di modi ma osservo che, in uscita, alcuni modi possono scomparire. Infatti se C è tale che, per un certo $u_{\hat{i}}$,

$$C u_{\hat{i}} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{\hat{i}} \in N(C)$$

avremo che il modo corrispondente a questo autovalore scompare. La stessa cosa può succedere per gli autovalori complessi, può infatti, capitare

$$C(u_{\hat{i}a} \quad u_{\hat{i}b}) = 0$$

In questi casi il modo si dice non osservabile.

RISPOSTA AL GRADINO

Ricordiamo che la risposta al gradino in uscita era

$$y(k) = (C(I-A)^{-1}B + D)u_0 + CA^k(x_0 + (A-I)^{-1}Bu_0)$$

Questo nel caso di sistema lineare stazionario discreto. La risposta al gradino può essere scomposta in un termine costante o di regime

$$(C(I-A)^{-1}B + D)u_0$$

e in un termine transitorio se $|\lambda_i| < 1$ hmm e

$$CA^k(x_0 + (A-I)^{-1}Bu_0)$$

che è del tipo evoluzione libera a partire dallo stato iniziale

$$x_0 + (A-I)^{-1}Bu_0$$

Se $|\lambda_i| < 1$ il secondo termine scompare dopo un certo tempo e viene chiamato, per questo, risposta a regime transitoria. Il primo termine, invece, si chiama risposta a regime permanente. Siccome il 2° termine scompare dopo un certo tempo possiamo scrivere

$$y(k) \cong (C(I-A)^{-1}B + D)u_0 = Gu_0$$

dove $G = (C(I-A)^{-1}B + D)$ viene chiamata matrice dei guadagni statici. Questa relazione è valida anche quando l'ingresso varia lentamente rispetto alla dinamica del sistema. Infatti, in questo caso, se $u(k)$ varia lentamente

$$x(k+1) \cong x(k)$$

poiché

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$

Allora possiamo scrivere

$$X(k) = A X(k) + B u(k)$$

$$(I - A) X(k) = B u(k)$$

$$X(k) = (I - A)^{-1} B u(k)$$

In definitiva

$$y(k) = C(I-A)^{-1} B u(k) + D u(k) = G u(k)$$

Quindi, quando il ~~sistema~~ ~~il~~ segnale di ingresso è quasi statico, il sistema lo possiamo ritenere tipo proporzionale, cioè istantaneo, privo di memoria

$$y(k) = G u(k)$$

Nel caso continuo avremo le stesse cose. La risposta al gradino di un sistema lineare stazionario continuo può essere scomposta in un termine costante o di regime

$$\left(C(-A)^{-1} B + D\right) u_0$$

e in un termine transitorio se $Re\,\lambda_i < 0$ pure

$$C e^{At} (x_0 + A^{-1} B u_0)$$

Esso è un termine del tipo evoluzione libera a partire dallo stato

$$x_0 + A^{-1} B u_0$$

Il termine transitorio, dopo un certo tempo, scompare per cui

$$y(t) \cong \left(C(-A)^{-1} B + D\right) u_0 = G u$$

dove G è la matrice dei guadagni statici.
Tale relazione è valida anche nel caso in cui l'ingresso è lentamente variabile in rapporto alle costanti di tempo degli autovalori. Infatti.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Se u varia lentamente anche x varia lentamente e quindi

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

$$0 = Ax + Bu \quad \Rightarrow \quad x = (-A)^{-1} Bu$$

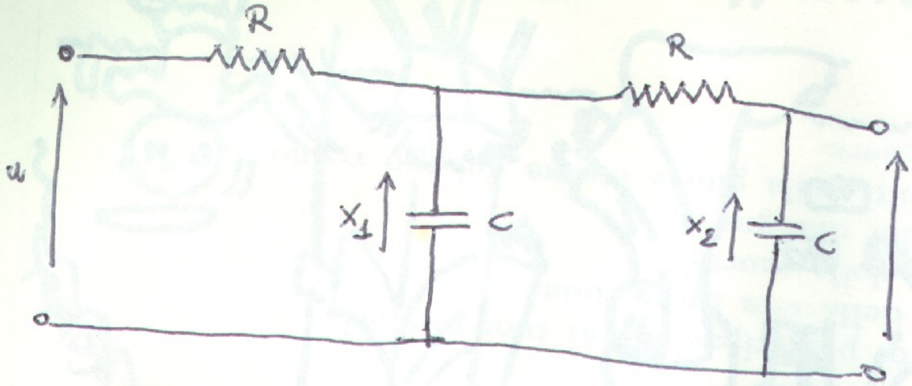
e quindi:

$$y = Cx + Du = C(-A)^{-1}B\,u(t) + D\,u(t)$$

$$y = [C(-A)^{-1}B + D]\,u(t) = G\,u(t)$$

cioè, per segnali lentamente variabili, il sistema è di tipo proporzionale. Osserviamo inoltre che la risposta forzata ad un gradino (di ampiezza unitaria) si dice risposta INDICIALE. Spesso la risposta indiciale viene usata per una valutazione sintetica del comportamento dinamico di un dato sistema lineare e stazionario.

ESEMPIO



Applicando i principi di Kirchhoff avremo

$$\begin{cases} \dfrac{u - x_1}{R} = C\dot{x}_1 + C\dot{x}_2 \\ x_1 = RC\dot{x}_2 + x_2 \end{cases}$$

ponendo $RC = \tau$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{x_1}{\tau} - \dfrac{x_1}{\tau} + \dfrac{x_2}{\tau} + \dfrac{u}{\tau} \\ \dot{x}_2 = \dfrac{x_1}{\tau} - \dfrac{x_2}{\tau} \end{cases}$$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{\tau} & \dfrac{1}{\tau} \\ \dfrac{1}{\tau} & -\dfrac{1}{\tau} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\tau} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

Determiniamo anzitutto gli autovalori

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{2}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \\ -\frac{1}{\tau} & \lambda + \frac{1}{\tau} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{3}{\tau}\lambda + \frac{1}{\tau^2} = 0$$

Applicando la regola di Cartesio osservo che le radici di $P(\lambda)$ sono tutte a parte reale negativa per cui il sistema è stabile asintot.camente. Il sistema, allora, non può

$$\lambda = -\frac{3}{2\tau} \pm \frac{\sqrt{5}}{2\tau}$$

oscillare

$$\lambda_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2\tau} \qquad \lambda_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2\tau}$$

$$\tau_1 = \frac{2\tau}{3-\sqrt{5}} \qquad \tau_2 = \frac{2\tau}{3+\sqrt{5}}$$

$$\tau_{max} = \tau_1 \cong 2,5\tau$$

Allora se, ad esempio, $C = 1\mu F$, $R = 10\,\Omega$

$$\tau_{max} = 2,5 \cdot 10^{-5} = 25\,\mu sec$$

Quindi dopo circa $100\,\mu sec$ l'evoluzione libera scompare. Determiniamo, adesso, la matrice G dei guadagni statici

$$G = C(-A)^{-1}B + D$$

Nel nostro caso $D = 0$

$$G = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} \frac{2}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \\ -\frac{1}{\tau} & +\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{2}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \\ -\frac{1}{\tau} & \lambda + \frac{1}{\tau} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{3}{\tau}\lambda + \frac{1}{\tau^2} = 0$$

Applicando la regola di Cartesio osservo che le radici di $P(\lambda)$ sono tutte a parte reale negativa per cui il sistema è stabile asintoticamente

$$\lambda = -\frac{3}{2\tau} \pm \frac{\sqrt{5}}{2\tau}.$$ Il sistema, allora, non può oscillare

$$\lambda_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2\tau} \qquad \lambda_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2\tau}$$

$$\tau_1 = \frac{2\tau}{3-\sqrt{5}} \qquad \tau_2 = \frac{2\tau}{3+\sqrt{5}}$$

$$\tau_{max} = \tau_1 \cong 2{,}5\,\tau$$

Allora se, ad esempio, $C = 1\mu F$, $R = 10\,\Omega$

$$\tau_{max} = 2{,}5 \cdot 10^{-5} = 25\,\mu sec$$

Quindi dopo circa $100\,\mu sec$ l'evoluzione libera scompare. Determiniamo, adesso, la matrice G dei guadagni statici

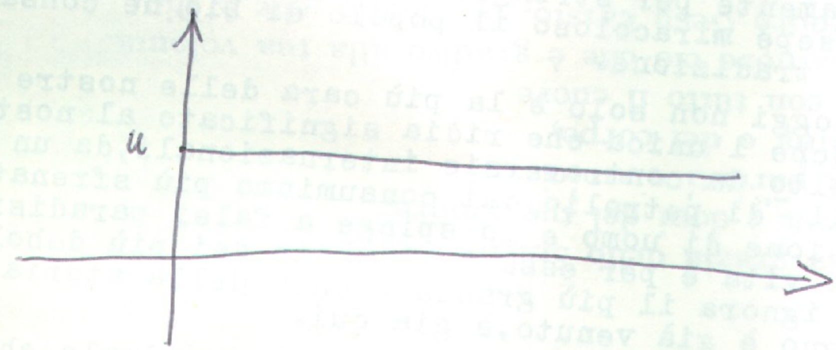
$$G = C(-A)^{-1}B + D$$

Nel nostro caso $D = 0$

$$G = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} \frac{2}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \\ -\frac{1}{\tau} & +\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{c} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \\ 0 \end{pmatrix}}{\frac{1}{c^2}} = 1$$

cioè $G = 1$. Questo lo possiamo anche verificare. Inf
se applichiamo ~~al~~ un gradino ~~un~~ al sistema



dopo un po' di tempo l'evoluzione libera se
parte e avremo

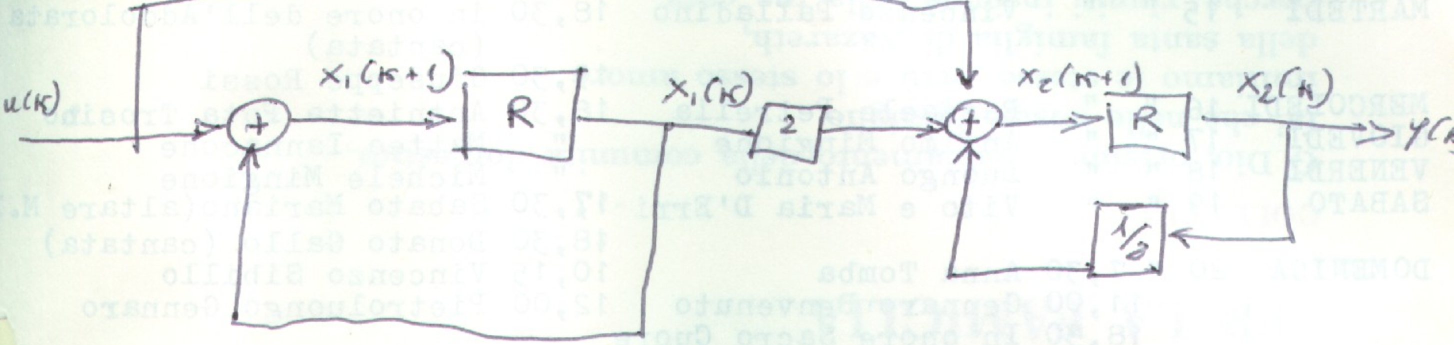
$$y = Gu = u$$

infatti se noi applichiamo il gradino, i cond
satori si comportano come un circuito aperto,
perché siamo a tensione costante, per cui si ve
proprio

$$y = u$$

ESERCIZIO

A volte il sistema può essere assegnato nel seguente modo



Dallo schema possiamo passare subito alle equazioni

$$x_1(k+1) = x_1(k) + u(k)$$

$$x_2(k+1) = 2x_1(k) + \frac{x_2(k)}{2} + u(k)$$

$$y(k) = x_2(k)$$

In forma matriciale

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(k)$$

Calcoliamo allora l'evoluzione libera del sistema a partire dallo stato iniziale

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$$

L'evoluzione libera è data da

$$x(k) = A^k x_0 = \lambda_1^k u_1 v_1^T x_0 + \lambda_2^k u_2 v_2^T x_0$$

in questo gli autovalori sono entrambi reali

Infatti,

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -1+\lambda & 0 \\ -2 & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

però siccome

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

è triangolare, gli autovalori sono gli elementi della diagonale principale

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Osserviamo allora che c'è un modo costante e un modo convergente. Occorre allora trovare gli autovettori

$$(\lambda_1 I - A) u_1 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} u_1 = 0 \quad ; \quad -2 u_{11} + \frac{1}{2} u_{12} = 0$$

Se $u_{11} = \frac{1}{2}$, $u_{12} = 2$

Pongo $u_1 = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ poiché $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}$. Con lo stesso procedimento trovo $u_2 = \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$T = \begin{pmatrix}1 & 0\\4 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\4 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\-4 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1^T\\v_2^T\end{pmatrix}$$

$$x(k) = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} x_0 + \frac{1}{2^k}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 1\end{pmatrix} x_0$$

$$x(k) = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} x_{10} + \frac{1}{2^k}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(x_{20} - 4x_{10})$$

$$\begin{cases} x_1(k) = x_{10} \\ x_2(k) = 4x_{10} + \frac{1}{2^k}(x_{20} - 4x_{10}) \end{cases}$$

e $y(k) = x_2(k)$

Se poniamo $x_{10} = 1$, $x_{20} = 1$, l'evoluzione libera è

$$x_1(k) = 1$$

$$x_2(k) = 4 + \frac{1}{2^k}(1-4) = 4 - \frac{3}{2^k} = y(k)$$

ESERCIZIO

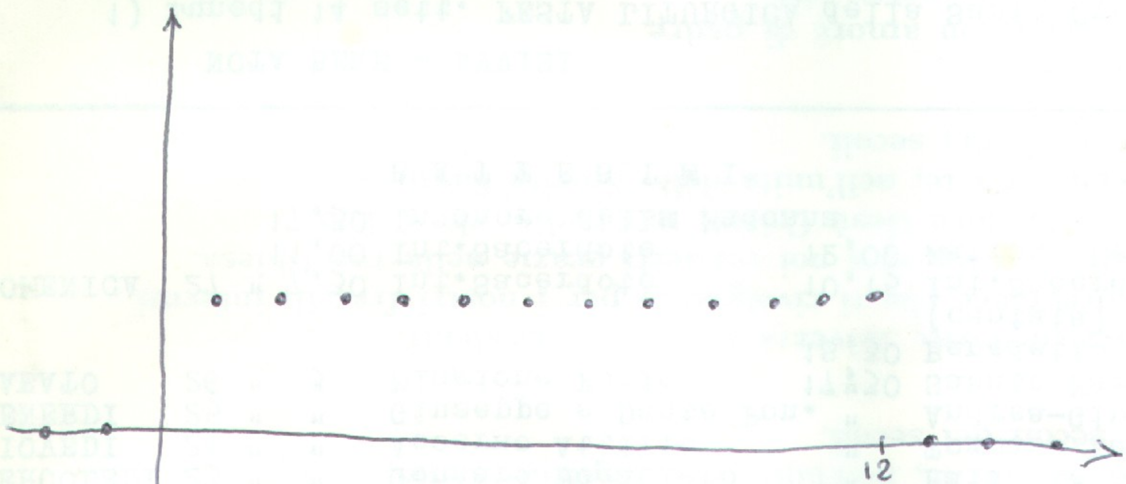
Consideriamo il seguente sistema

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(k)$$

Consideriamo un ingresso del tipo

$$u(k) = 1(k) - 1(k-12)$$



Vogliamo calcolare la risposta forzata a questo ingresso. Per calcolare la risposta forzata a quell'ingresso possiamo procedere in due modi:

1) osservo che il mio sistema è somma di due ingressi:

$$u(k) = 1(k) - 1(k-12)$$

Poiché il sistema è lineare, la risposta all'ingresso totale è somma delle risposte agli ingressi $1(k)$ e $-1(k-12)$. Indichiamo allora con $W_{-1}(k)$ la risposta al gradino di ampiezza unitaria. Essa, come abbiamo detto precedentemente viene detta risposta indiciale. [illegible] che la risposta a $1(k-12)$ è

$W_{-1}(k-12)$. Allora

Usiamo $y(k) = W_{-1}(k) - W_{-1}(k-12)$

Usiamo, invece, un'altro metodo.

2) Il sistema è forzato da $1(k)$ per $k<12$, mentre per $k \geq 12$ il sistema è in evoluzione libera a partire dallo stato iniziale $x(12)$, infatti per $k \geq 12$ $u(k)=0$. Pertanto la risposta in uscita vale

$$y(k) = \begin{cases} W_{-1}(k) & \text{per } k<12 \\ CA^{k-12}x(12) & \text{per } k \geq 12 \end{cases}$$

Cominciamo a determinare la risposta per $k<12$ ossia la risposta indiciale ~~per~~ $W_{-1}(k)$. Ricordiamo che la risposta forzata al gradino unitario nello stato è

$$x(k) = (I - A^{k})^{-1}(I-A)^{k} B$$

Infatti la risposta totale è

$$x(k) = A^k x_0 + (I-A)^{-1}(I-A^k)Bu_0$$

Calcoliamo allora A^k. Dobbiamo allora determinare gli autovalori. Osserviamo che la matrice A si trova già nella forma spettrale. Infatti

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$ dove $\alpha \pm j\omega$ sono due autovalori

$$\rho = 0.707$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$$

$$A^K = \rho^K \begin{pmatrix} \cos\theta K & \sin\theta K \\ -\sin\theta K & \cos\theta K \end{pmatrix} \qquad \rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\alpha} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$A^K = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^K \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4}K & \sin\frac{\pi}{4}K \\ -\sin\frac{\pi}{4}K & \cos\frac{\pi}{4}K \end{pmatrix}$$

$$X(K) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^K \cos\frac{\pi}{4}K & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^K \sin\frac{\pi}{4}K \\ -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^K \sin\frac{\pi}{4}K & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^K \cos\frac{\pi}{4}K \end{pmatrix} \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X(K) = \left\{ \begin{matrix} 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^K \cos\frac{\pi}{4}K & -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^K \sin\frac{\pi}{4}K \\ -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^K \sin\frac{\pi}{4}K & 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^K \cos\frac{\pi}{4}K \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^K \cos\frac{\pi}{4}K & -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^K \sin\frac{\pi}{4}K \\ -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^K \sin\frac{\pi}{4}K & 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^K \cos\frac{\pi}{4}K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 - 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^K \cos\frac{\pi}{4}K + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^K \sin\frac{\pi}{4}K \\ 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^K \sin\frac{\pi}{4}K - 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^K \cos\frac{\pi}{4}K \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \left(\sin\frac{\pi}{4}k - 3\cos\frac{\pi}{4}k\right) \\ -1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \left(3\sin\frac{\pi}{4}k + \cos\frac{\pi}{4}k\right) \end{pmatrix}$$

Allora per $k<12$

$$y(k) = C\,x(k) = (1 \;\; 1) \begin{pmatrix} 3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \left(\sin\frac{\pi}{4}k - 3\cos\frac{\pi}{4}k\right) \\ -1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \left(3\sin\frac{\pi}{4}k + \cos\frac{\pi}{4}k\right) \end{pmatrix} =$$

$$= 3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \left(\sin\frac{\pi}{4}k - 3\cos\frac{\pi}{4}k\right) - 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \left(3\sin\frac{\pi}{4}k + \cos\frac{\pi}{4}k\right) =$$

$$= 2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \left(4\sin\frac{\pi}{4}k - 2\cos\frac{\pi}{4}k\right) =$$

$$= 2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \sqrt{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}k - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$$

$$\tau = \frac{2}{\log 2}$$

Per $k \geq 12$

$$y(k) = C\,A^{k-12}\,x(12) = (1 \;\; 1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{k-12} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4}(k-12) & \sin\frac{\pi}{4}(k-12) \\ -\sin\frac{\pi}{4}(k-12) & \cos\frac{\pi}{4}(k-12) \end{pmatrix}$$

$$x(12) = \begin{pmatrix} 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}12 - 3\cos\frac{\pi}{4}12\right) \\ -1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12}\left(3\sin\frac{\pi}{4}12 + \cos\frac{\pi}{4}12\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12} \\ -1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\left(1 + \frac{64}{4096}\right) \\ -1 - \frac{64}{4096} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot 65}{64} \\ -\frac{65}{64} \end{pmatrix}$$

Quindi, per $K \geq 12$

$$y(K) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{K-12} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4}(K-12) & \sin\frac{\pi}{4}(K-12) \\ -\sin\frac{\pi}{4}(K-12) & \cos\frac{\pi}{4}(K-12) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\cdot\frac{65}{64} \\ -\frac{65}{64} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{K-12} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\cos\frac{\pi}{4}(K-12)\right) 3\cdot\frac{65}{64} - \frac{65}{64}\sin\frac{\pi}{4}(K-12) \\ -\frac{65}{64} 3 \sin\frac{\pi}{4}(K-12) - \frac{65}{64}\cos\frac{\pi}{4}(K-12) \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{K-12} \left[\left(\cos\frac{\pi}{4}(K-12)\right) 3\cdot\frac{65}{64} - \frac{65}{64}\sin\frac{\pi}{4}(K-12) - \frac{65}{64}\cdot 3\sin\frac{\pi}{4}(K-12) - \frac{65}{64}\cos\frac{\pi}{4}(K \right.$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{K-12} \left[\frac{65}{32}\cos\frac{\pi}{4}(K-12) - \frac{65}{16}\sin\frac{\pi}{4}(K-12) \right] =$$

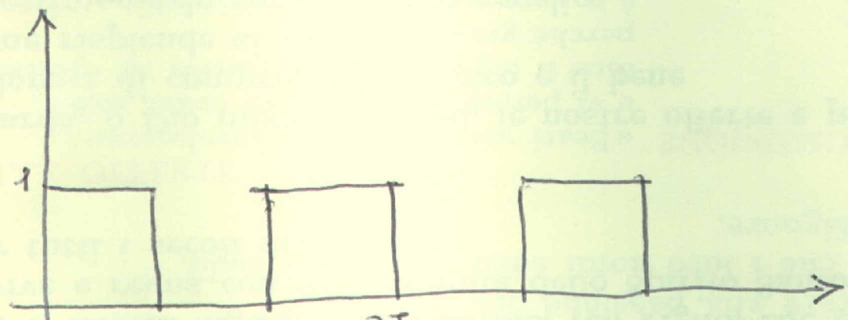
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{K-12} \frac{65}{32}\sqrt{5}\sin\frac{\pi}{4}\left((K-12) - \frac{4}{\pi}\,tg^{-1}2\right)$$

ESERCIZIO

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 12 & 0 \end{pmatrix} x$$

Supponiamo di sollecitare questo sistema con un segna-
le periodico (onda quadra)



Come possiamo vedere, l'ingresso è costante a tratti
per cui il nostro sistema può essere trattato come
un sistema a dati campionati

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$

$$y(k) = C x(k)$$

con

$$A_d = e^{AT} \quad ; \quad B_d = \int_0^T e^{A\tau} B \, d\tau$$

$$u(k) = 1, 0, 1 \ldots$$

dove con $x(k)$ e $y(k)$ si intendono $x(kT)$ e $y(kT)$

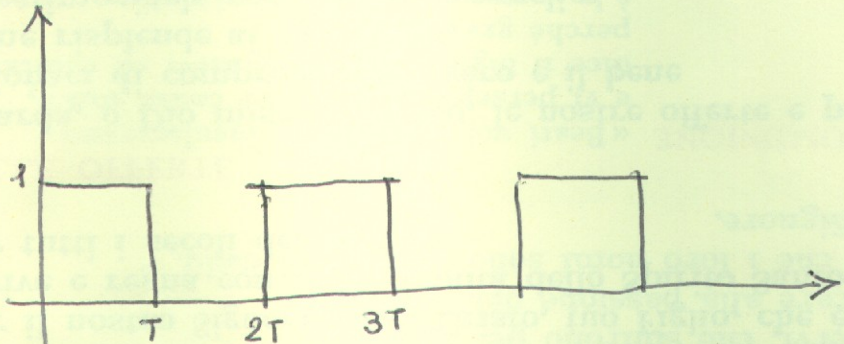
Questo sistema discreto descrive in modo rigoroso
il sistema continuo negli istanti kT.

ESERCIZIO

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (12 \quad 0)\, x$$

Supponiamo di sollecitare questo sistema con un segna-
le periodico (onda quadra)



Come possiamo vedere, l'ingresso è costante a tratti, per cui il nostro sistema può essere trattato come un sistema a dati campionati

$$x(k+1) = A_d\, x(k) + B_d\, u(k)$$

$$y(k) = C\, x(k)$$

con

$$A_d = e^{AT} \quad ; \quad B_d = \int_0^T e^{A\tau} B \, d\tau$$

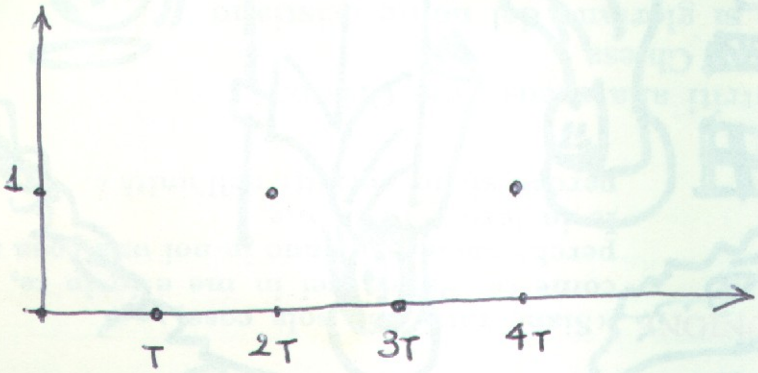
$$u(k) = 1, 0, 1 \dots$$

dove con $x(k)$ e $y(k)$ si intendono $x(kT)$ e $y(kT)$

Questo sistema discreto descrive in modo rigoroso il sistema continuo negli istanti kT.

Calcoliamo allora la risposta forzata a quell'ingresso. È

Osserviamo che, rispetto al sistema a dati campionati, quell'ingresso equivale al seguente



sono tanti impulsi centrati in 0, T, 2T, ecc e, quando k è pari, l'impulso ha ampiezza 1 mentre quando k è dispari, l'impulso ha ampiezza zero.

Allora la risposta forzata ($x_0=0$) a questo ingresso è

$$x_f(k)=\sum_{h=0}^{k-1} A_d^{k-1-h} B_d\, u(h) = A_d^{k-1} B_d\, u(0) + A_d^{k-2} B_d\, u(1) + \dots + I_d B\, u(k-1) =$$

$$= \left(A_d^{k-1} + A_d^{k-3} + \dots + A_d\right) B_d \quad \text{se } k \text{ è pari.}$$

Allora

$$x_f(k) = \begin{cases} (I - A_d^2)^{-1}(I - A_d^{k+1}) B_d & \text{per } k \text{ dispari} \\ A_d (I - A_d^2)^{-1} (I - A_d^{k}) B_d & \text{per } k \text{ pari} \end{cases}$$

Infatti

$$\left(A_d^{k+1} + A_d^{k-3} + \dots + A_d\right) = A_d\left(A^{k-2} + A_d^{k-4} + \dots + I\right)$$

osserviamo che la somma k-esima di

$$A_d^{k-2} + A_d^{k-4} + \dots + I$$

è proprio

$$(I-A_d^2)^{-1}(I-A_d^K)$$

Analogamente

$$A_d^{K-1}+A_d^{K-3}+\dots+I=(I-A_d^2)^{-1}(I-A_d^{K+1})$$

Vogliamo determinare adesso la risposta forzata in uscita. Non determineremo l'uscita negli istanti discreti ma l'uscita continua. Osserviamo che il sistema è sollecitato da un gradino per $t\in[2KT,(2K+1)T]$, ed è in evoluzione libera per $t\in[(2K+1)T,2(K+1)T]$ a partire dallo stato iniziale

$$x((2K+1)T)=x(2K+1)$$

Allora l'evoluzione libera a partire dallo stato $x(2K+1)$ è

$$y(t)=C\,x_e(t) \quad \text{ma} \quad x_e(t)=e^{A(t-(2K+1)T)}x(2K+1)$$

cioè, per $t\in[(2K+1)T,2(K+1)T]$

$$y(t)=C\,e^{A(t-(2K+1)T)}x(2K+1)$$

mentre la risposta al generico gradino applicato nell'istante $2KT$ è

$$y(t)=C(-A)^{-1}B+C\,e^{A(t-2KT)}(x(2K)+A^{-1}B)$$

in questo $D=0$ e questa è proprio la risposta in uscita per $t\in[2KT,(2K+1)T]$

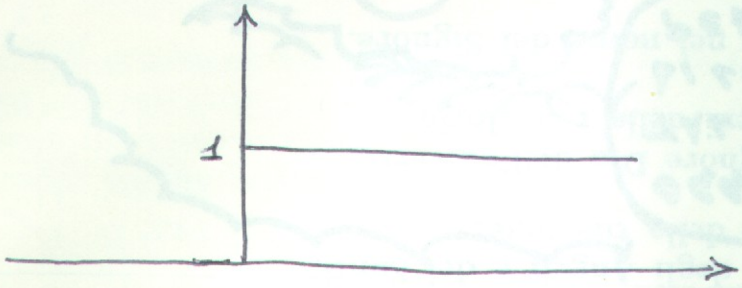
ESERCIZIO

Consideriamo il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & \pi \\ -\pi & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} \pi & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

Vogliamo ~~ap~~ calcolare la risposta forzata al gradino applicato in zero con $x_0 = x(0) = 0$



Vogliamo calcolare la risposta indiciale $w_{-1}(t)$. Ricordiamo che la risposta al gradino vale

$$y(t) = \left(C(-A)^{-1}B + D\right)u_0 + Ce^{At}\left(x_0 + A^{-1}Bu_0\right)$$

In questo caso $x_0 = 0$ e $D = 0$, $u_0 = 1$

$$y(t) = \left(C(-A)^{-1}B\right) + Ce^{At}A^{-1}B$$

Dobbiamo calcolare e^{At}. Siccome A è già in forma spettrale, gli autovalori sono

$$\lambda_1 = -1 + j\pi \quad ; \quad \lambda_2 = -1 - j\pi$$

Siccome gli autovalori sono a parte reale negativa il sistema è stabile asintoticamente. Inoltre, siccome $\alpha_n < 0$, il termine evoluzione libera è convergente.

Ricordandolo allora che

$$e^{At} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} = e^{\begin{bmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{bmatrix} t}$$

nel

nel nostro caso

$$e^{\begin{pmatrix}-1 & \pi \\ -\pi & -1\end{pmatrix}t} = e^{-t}\begin{pmatrix}\cos\pi t & \sin\pi t \\ -\sin\pi t & \cos\pi t\end{pmatrix}$$

$$y(t) = (\pi \quad 1)\begin{pmatrix}1 & -\pi \\ \pi & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} + (\pi \quad 1)\, e^{-t}\begin{pmatrix}\cos\pi t & \sin\pi t \\ -\sin\pi t & \cos\pi t\end{pmatrix} A^{-1}\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix}-1 & -\pi \\ +\pi & -1\end{pmatrix}}{1+\pi^2}\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix}-\pi \\ -1\end{pmatrix}}{1+\pi^2}$$

$$y(t) = -1 + (\pi \quad 1)\, e^{-t}\,\frac{\begin{pmatrix}\cos\pi t & \sin\pi t \\ -\sin\pi t & \cos\pi t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\pi \\ -1\end{pmatrix}}{1+\pi^2}$$