ANALISI DEI SISTEMI CONTINUI NEL DOMINIO DELLE S

In alcuni casi l'analisi di un sistema continuo lineare e stazionario si semplifica se si ricorre a metodi basati sulla trasformata di Laplace.

La trasformata di Laplace di una funzione reale di variabile reale $f(t)$, definita per $t \geq 0$, è una funzione complessa $F(s)$, legata alla $f(t)$ nel seguente modo

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds$$

La trasformata di Laplace converge per tutti gli s tali che $Re(s) > \alpha$ se converge per $s = \alpha + j\omega$.

La trasformata di Laplace viene introdotta perché alcune operazioni integro-differenziali si tramutano in operazioni algebriche.

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt} f(t)\right) \rightarrow s F(s) - f(0+)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right) = \frac{1}{s} F(s)$$

$$\mathcal{L}\left(\int^t f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau\right) = F(s)\, G(s)$$

$$\delta(t-T) \xrightleftharpoons[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} e^{-sT}$$

$$\delta_{-1}(t-T) \xrightleftharpoons[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} \frac{1}{s} e^{-sT}$$

$$e^{\lambda t} \xrightleftharpoons[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} \frac{1}{s-\lambda}$$

$$\frac{t^{m-1} e^{\lambda t}}{(m-1)!} \longleftrightarrow \frac{1}{(s-\lambda)^m}$$

$$e^{\alpha t} \sin\omega t \longleftrightarrow \frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$$

$$e^{\alpha t} \cos\omega t \longleftrightarrow \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$$

$$a e^{\alpha t} \cos\omega t + \frac{b+\alpha a}{\omega} e^{\alpha t} \sin\omega t \longleftrightarrow \frac{as+b}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$$

TEOREMA DEL VALORE INIZIALE E FINALE

Se esiste il limite per $t \to \infty$ di $f(t)$ allora

$$\lim_{s \to 0} sF(s) = f(\infty)$$

se esiste il limite per $t \to 0^+$ di $f(t)$

$$\lim_{s \to \infty} sF(s) = f(0^+)$$

Consideriamo il sistema lineare stazionario continuo descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$
$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$$

Nell' ipotesi che $x(t)$ e $u(t)$ siano trasformabili avremo

$$\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = \mathcal{L}(A\,x(t)) + \mathcal{L}(B\,u(t))$$

$$s\,X(s) - x_0 = A\,X(s) + B\,U(s)$$

cioè

$$\begin{cases} (sI - A)\,X(s) = x_0 + B\,U(s) \\ Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s) \end{cases}$$

per cui, nel dominio delle s si può scrivere

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x_0 + (sI - A)^{-1} B\,U(s)$$
$$Y(s) = C\,(sI - A)^{-1} x_0 + \left(C\,(sI - A)^{-1} B + D\right) U(s)$$

Se consideriamo adesso la forma esplicita del sistema

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t)\,x_0 + \int_0^t H(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau \\ y(t) = \varphi(t)\,x_0 + \int_0^t w(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau \end{cases}$$

e la trasformiamo, avremo

$$\begin{cases} X(s) = \Phi(s)\,x_0 + H(s)\,U(s) \\ Y(s) = \varphi(s)\,x_0 + W(s)\,U(s) \end{cases}$$

Confrontando avremo

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

$$H(s) = (sI - A)^{-1} B$$

$$\Psi(s) = C(sI - A)^{-1}$$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

la matrice $W(s)$ si chiama matrice di trasferimento del sistema. Osservo che $x_0 = 0$

$$Y(s) = W(s)\, U(s)$$

cioè, nel dominio della s, la funzione di trasferimento consente di calcolare direttamente l'evoluzione forzata in uscita. Il generico elemento della matrice è

$$W_{ij}(s) = \left. \frac{Y_i(s)}{U_j(s)} \right|_{\substack{u_h(s)=0 \\ h \neq j}}$$

È precisamente $W_{ij}(s)$ è il rapporto tra la trasformata di Laplace della uscita i-esima e la trasformata di Laplace dell'ingresso j-esimo quando tutti gli altri ingressi sono nulli. Infatti

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & \cdots & W_{1j} & \cdots & W_{1m} \\ \vdots & & & & \\ W_{i1} & \cdots & W_{ij} & \cdots & W_{im} \\ \vdots & & & & \\ W_{n1} & \cdots & W_{nj} & \cdots & W_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ U_j(s) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} W_{1j}(s)\, U_j(s) \\ \vdots \\ W_{ij}(s)\, U_j(s) \\ \vdots \\ W_{mj}(s)\, U_j(s) \end{pmatrix} \Rightarrow Y_i(s) = W_{ij}(s)\, U_j(s)$$

Inoltre se sull'ingresso j-esimo pongo un impulso unitario avrò

$$W_{ij} = Y_i(s)$$

per cui possiamo dire che è la trasformata di Laplace dell'uscita i-esima che si ottiene applicando un impulso unitario all'ingresso j-esimo.

Nel caso in cui c'è un solo ingresso ed una sola uscita la W è uno scalare per cui si chiama funzione di trasferimento. Nel caso che $u(t)$ e $y(t)$ convergono per $t \to \infty$ si ha

$$Y(\infty) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} W(s)\, s\, U(s) =$$

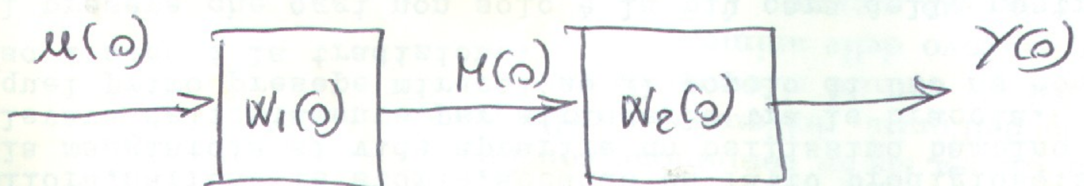
$$= W(s)\Big|_{s=0} \cdot \lim_{s \to 0} sU(s) = W(s)\Big|_{s=0} \cdot u(\infty)$$

e quindi

$$W(s)\Big|_{s=0} = W(0) = C(-A)^{-1}B + D = G$$

è proprio la matrice dei guadagni statici.

Supponiamo, adesso, di avere due sistemi collegati in cascata



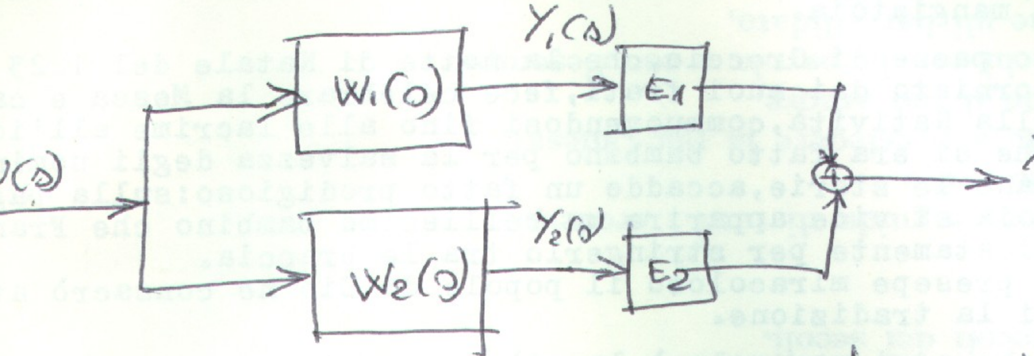
troviamo che la funzione di trasferimento del sistema totale sarà

$$W(s) = W_2(s)\, W_1(s)$$

Infatti

$$Y(s) = W_2(s)\, M(s) = W_2(s)\, W_1(s)\, U(s)$$

Vediamo adesso il caso di due sistemi connessi in parallelo con due matrici di accoppiamento E_1 ed E_2 in modo che le uscite si possono sommare



Si ottiene un sistema con matrice di trasferimento

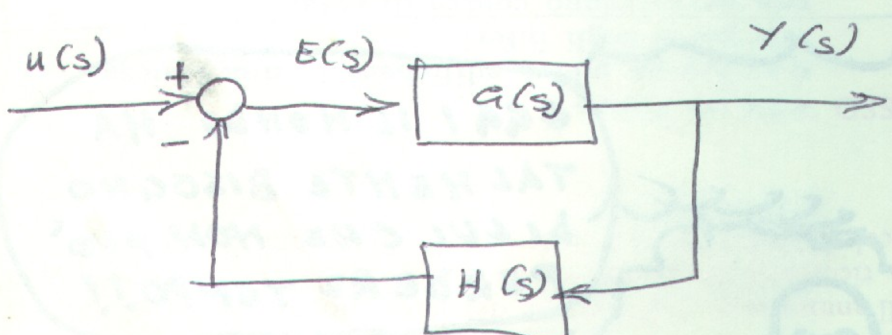
$$W(s) = E_1 W_1(s) + E_2 W_2(s)$$

Infatti

$$Y(s) = E_1 Y_1(s) + E_2 Y_2(s) = E_1 W_1(s) U(s) + E_2 W_2(s) U(s)$$

$$= \left(E_1 W_1(s) + E_2 W_2(s) \right) U(s) = W(s) U(s)$$

Consideriamo adesso un sistema a controreazione



Si dimostra che la matrice di trasferimento del sistema complessivo è

$$W(s) = \left(I + G(s)H(s) \right)^{-1} G(s)$$

Infatti $\quad Y(s) = E(s)G(s) = G(s)\left(U(s) - H(s)Y(s) \right)$

$$Y(s) + G(s)H(s)Y(s) = G(s)U(s)$$

$$(I + G(s) H(s)) Y(s) = G(s) U(s)$$

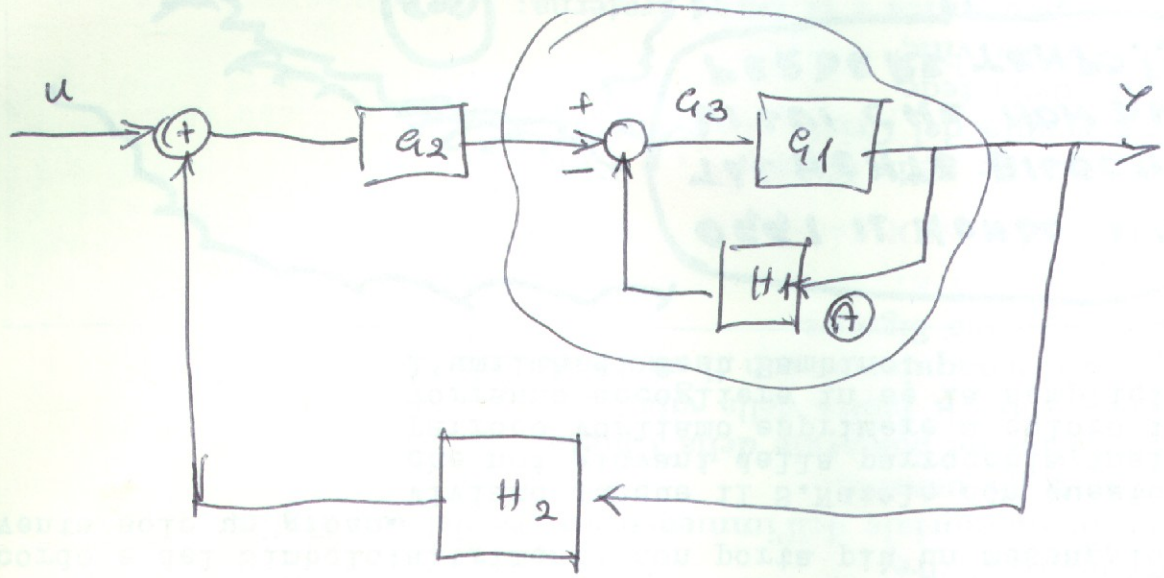
$$Y(s) = (I + G(s) H(s))^{-1} G(s) U(s)$$

Nel caso di un solo ingresso e una sola uscita

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

(se c'è retroazione negativa) $\frac{G(s)}{1 - G(s)}$

ESEMPIO



Indichiamo con G_3 la matrice di trasferimento del blocco A, avremo

$$G_3 = (I + G_1 H_1)^{-1} G_1$$

$$W = (I - G_3 G_2 H_2)^{-1} G_3 G_2$$

MATRICE DI TRANSIZIONE $\Phi(s)$

vogliamo adesso calcolare l'antitrasformata della matrice $\Phi(s)$

$$\Phi(s) = (sI-A)^{-1} = \frac{Agg(sI-A)}{|sI-A|} = \frac{P_1 s^{n-1} + P_2 s^{n-2} + \dots + P_n}{s^n + q_1 s^{n-1} + \dots + q_n} = \frac{P(s)}{p(s)}$$

Al numeratore abbiamo un polinomio $P(s)$ matriciale cioè P_i è una matrice. Il polinomio al denominatore è proprio il polinomio caratteristico di A.

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(s) = (sI-A)^{-1} = \begin{pmatrix} s-2 & -1 \\ -3 & s-4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s-4 & -3 \\ -1 & s-2 \end{pmatrix}}{s^2-6s+5} =$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}{s^2-6s+5}$$

I coefficienti dei due polinomi possono essere calcolati mediante il seguente algoritmo che non dimostriamo chiamato algoritmo di Leverrier. Esso dice che

$$\begin{cases} P_1 = I \\ P_i = A P_{i-1} + a_{i-1} I \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = -\text{traccia di } A \\ a_i = -\frac{1}{i} \text{traccia} (A P_i) \end{cases}$$

Osservo che il rapporto $\frac{P(s)}{p(s)}$ può essere ridotto ai minimi termini per cui può essere scritto al seguente modo

$$\Phi(s) = \frac{P(s)}{p(s)} = \frac{M(s)}{m(s)} = \frac{I s^{m-1} + M_2 s^{m-2} + \ldots + M_m}{s^m + \alpha_1 s^{m-1} + \ldots + \alpha_m}$$

Dove $m(s)$ è il rapporto tra il polinomio caratteristico $p(s)$ di A e il massimo comun divisore del numeratore $P(s)$. Il polinomio $m(s)$ viene chiamato polinomio minimo di A. Supponiamo che il polinomio caratteristico abbia un certo numero di radici con molteplicità $n_1, n_2, \ldots, n_e$. Possiamo scrivere

$$p(s) = (s-\lambda_1)^{n_1}(s-\lambda_2)^{n_2} \ldots (s-\lambda_e)^{n_e}$$

Vogliamo dimostrare che $m(s)$ ha tutte le radici di $p(s)$ con molteplicità eventualmente più piccola.

Ossia

$$m(s) = (s-\lambda_1)^{m_1}(s-\lambda_2)^{m_2} \ldots (s-\lambda_e)^{m_e}$$

$$\text{con} \quad m_i \leq n_i \quad \forall i$$

Inoltre se non vi sono radici con molteplicità

$$m(s) = p(s)$$

A tale scopo mostriamo anzitutto che $m(A) = 0$ cioè A è uno zero del polinomio minimo. Infatti:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{I s^{m-1} + M_2 s^{m-2} + \ldots + M_m}{s^m + \alpha_1 s^{m-1} + \ldots + \alpha_m}$$

$$I(s^m + \alpha_1 s^{m-1} + \ldots + \alpha_m) = (sI - A)(I s^{m-1} + M_2 s^{m-2} + \ldots + M_m)$$

$$I s^m + I\alpha_1 s^{m-1} + \ldots + I\alpha_m = I s^m + M_2 s^{m-1} + \ldots + s M_m -$$

$$I S^m + (M_2 - A) S^{m-1} + \dots + (M_m - A M_{m-1}) S - A M_m =$$

$$= I S^m + I \alpha_1 S^{m-1} + \dots + I \alpha_m$$

uguagliando i coefficienti troviamo

$$\begin{cases} I = I \\ \alpha_1 I = M_2 - A \\ \dots\dots \\ \alpha_{m-1} I = M_m - A M_{m-1} \\ I \alpha_m = - A M_m \end{cases}$$

Moltiplico ambo i membri della prima per A^m, la seconda per A^{m-1} e così via e poi sommo

$$A^m + \alpha_1 A^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1} A + I\alpha_m = A^m + A^{m-1}(M_2 - A) + \dots +$$

$$+ A(M_m - A M_{m-1}) - A M_m =$$

$$= \cancel{A^m} + A^{m-1} M_2 - \cancel{A^m} + \dots + \cancel{A M_m} - A^2 M_{m-1} - \cancel{A M_m} = 0$$

quindi $m(A) = 0$.

Sia ora λ_i un autovalore di A ed u_i un autovettore associato $A u_i = \lambda_i u_i \Rightarrow A^k u_i = \lambda_i^k u_i$ * $\forall k \geq 0$

Ma siccome $m(A) = 0$, $m(A) u_i = 0$ cioè

$$A^m u_i + \alpha_1 A^{m-1} u_i + \dots + \alpha_m u_i = \lambda_i^m u_i + \alpha_1 \lambda_i^{m-1} u_i + \dots + \alpha_m u_i$$

$$(\lambda_i^m + \alpha_1 \lambda_i^{m-1} + \dots + \alpha_m) u_i = 0 \Rightarrow m(\lambda_i) u_i = 0$$

siccome $u_i \neq 0$, $m(\lambda_i) = 0$. Cioè λ_i, $\forall i$ è radice del polinomio minimo.

* $A u_i = \lambda_i u_i$ $\quad A \cdot A u_i = A \lambda_i u_i =$ $\quad A^2 u_i = \lambda_i A u_i = \lambda_i^2 u_i$

$$IS^m + (M_2 - A)S^{m-1} + \dots + (M_m - AM_{m-1})S - AM_m =$$

$$= IS^m + I\alpha_1 S^{m-1} + \dots + I\alpha_m$$

uguagliando i coefficienti troviamo

$$\begin{cases} I = I \\ \alpha_1 I = M_2 - A \\ \dots\dots \\ \alpha_{m-1} I = M_m - AM_{m-1} \\ I\alpha_m = -AM_m \end{cases}$$

Moltiplico ambo i membri della prima per A^m, la seconda per A^{m-1} e così via e poi sommo

$$A^m + \alpha_1 A^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1}A + I\alpha_m = A^m + A^{m-1}(M_2 - A) + \dots +$$

$$+ A(M_m - AM_{m-1}) - AM_m =$$

$$= \cancel{A^m} + A^{m-1}M_2 - \cancel{A^m} + \dots + \cancel{AM_m} - A^2 M_{m-1} - \cancel{AM_m} = 0$$

quindi $m(A) = 0$.

Sia ora λ_i un autovalore di A ed u_i un autovettore associato

$$Au_i = \lambda_i u_i \Rightarrow A^k u_i = \lambda_i^k u_i \ {*} \ \forall k \geq 0$$

Ma siccome $m(A) = 0$, $m(A)u_i = 0$ cioè

$$A^m u_i + \alpha_1 A^{m-1} u_i + \dots + \alpha_m u_i = \lambda_i^m u_i + \alpha_1 \lambda_i^{m-1} u_i + \dots + \alpha_m u_i$$

$$(\lambda_i^m + \alpha_1 \lambda_i^{m-1} + \dots + \alpha_m) u_i = 0 \Rightarrow m(\lambda_i) u_i = 0$$

siccome $u_i \neq 0$, $m(\lambda_i) = 0$. cioè λ_i, $\forall i$ è radice del polinomio minimo.

* $Au_i = \lambda_i u_i$ $\quad A \cdot Au_i = A\lambda_i u_i \Rightarrow A^2 u_i = \lambda_i A u_i = \lambda_i^2 u_i$

ANTITRASFORMATA DI $\Phi(s)$

Si consideri il problema dell'antitrasformazione di $\Phi(s)$ che ci consente di calcolare in modo più generale la $\Phi(t)$.

Consideriamo prima il caso in cui gli autovalori di A siano distinti. Allora $\Phi(s)$ ammette il seguente sviluppo:

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{s-\lambda_i}$$

dove le matrici residue R_i si possono calcolare mediante la relazione

$$R_i = \lim_{s \to \lambda_i} \frac{P(s)}{\frac{d}{ds} p(s)} = \lim_{s \to \lambda_i} \Phi(s)(s-\lambda_i)$$

Calcolate le matrici residue R_i e antitrasformando si ha

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{i=1}^{n} R_i e^{\lambda_i t}$$

In queste formule abbiamo considerato anche le radici complesse λ_i. Se, allora, indichiamo con λ_i $i = 1 \ldots \mu$, le radici reali e con R_i le corrispondenti matrici residue e con $\lambda_h = \alpha_h \pm j\omega_h$, $h = 1 \ldots \nu$, le radici complesse e con $R_h = R_{ha} \pm j R_{hb}$ le corrispondenti matrici residue avremo

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^{n} R_i e^{\lambda_i t} + \sum_{h=1}^{\nu} 2 e^{\alpha_h t}(R_{ha} \cos \omega_h t - R_{hb} \sin \omega_h t)$$

Infatti

$$(R_{ha} + j R_{hb}) e^{\alpha_h t} e^{j\omega_h t} + (R_{ha} - j R_{hb}) e^{\alpha_h t} e^{-j\omega_h t} =$$

$$= (R_{ha} + j R_{hb}) e^{\alpha_h t}(\cos \omega_h t + j \sin \omega_h t) +$$

$$= e^{\alpha_n t}\left[R_{ha}\cos\omega_n t + jR_{ha}\sin\omega_n t + jR_{hb}\cos\omega_n t - R_{hb}\sin\omega_n t\right.$$

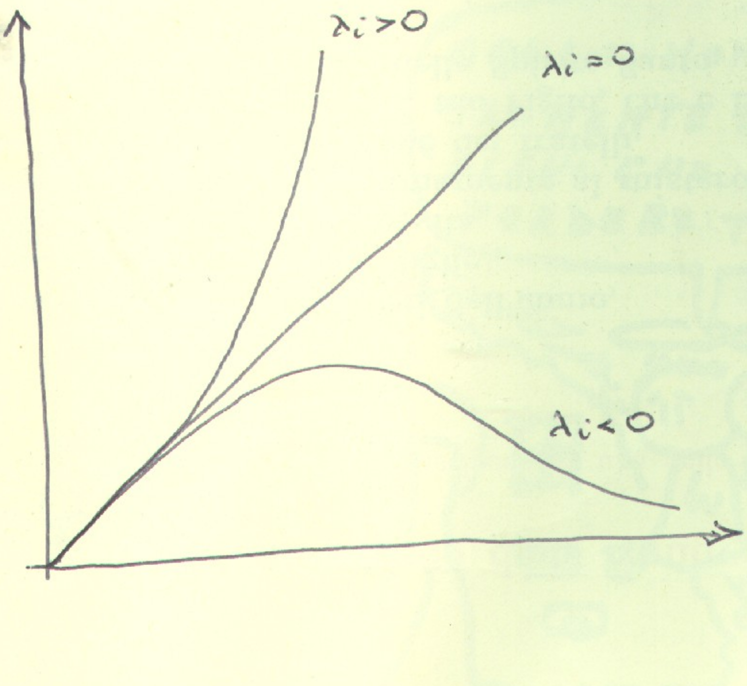
$$\left.+ R_{ha}\cos\omega_n t - jR_{ha}\sin\omega_n t + jR_{hb}\cos\omega_n t - R_{hb}\sin\omega_n t\right] =$$

$$= e^{\alpha_n t}\left[2R_{ha}\cos\omega_n t - 2R_{hb}\sin\omega_n t\right]$$

Nel caso in cui gli autovalori di A non sono distinti

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{R_{ik}}{(s-\lambda_i)^k} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_i} R_{ik}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_i t} = \Phi(t) = e^{At}$$

Osserviamo adesso che se la molteplicità delle radici del polinomio minimo, cioè m_i, chiamata molteplicità geometrica, è > 1, le leggi temporali dei modi corrispondenti a valori di $k > 1$ si modificano rispetto a quelle che abbiamo visto quando abbiamo parlato dei modi naturali. Infatti, quando $m_i > 1$, la legge temporale dei modi aperiodici sarà $t e^{\lambda_i t}$ e non $e^{\lambda_i t}$ mentre la legge temporale dei modi pseudoperiodici sarà $t e^{\alpha_n t}\sin\omega_n t$ e non $e^{\alpha_n t}\sin\omega_n t$. In questo caso per λ_i reale le leggi temporali dei modi saranno



$= e^{\alpha_{ei}t}[R_{ha}\cos\omega_{ei}t + jR_{ha}\sin\omega_{ei}t + jR_{hb}\cos\omega_{ei}t - R_{hb}\sin\omega_{ei}t$

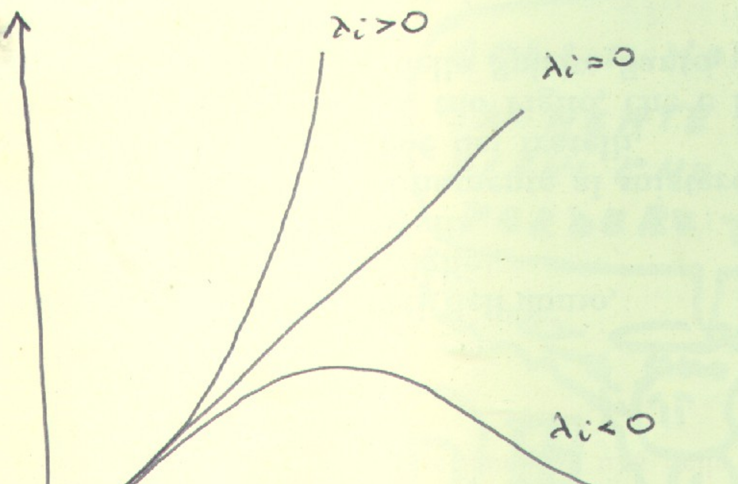
$+ R_{ha}\cos\omega_{ei}t - jR_{ha}\sin\omega_{ei}t + jR_{hb}\cos\omega_{ei}t - R_{hb}\sin\omega_{ei}t] =$

$= e^{\alpha_{ei}t}[2R_{ha}\cos\omega_{ei}t - 2R_{hb}\sin\omega_{ei}t]$

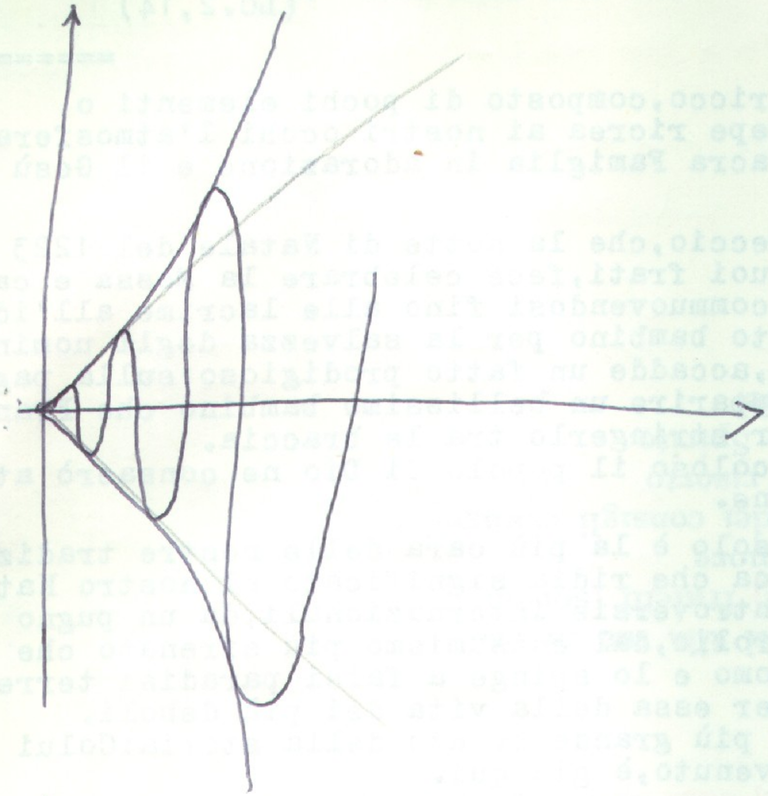
Nel caso in cui gli autovalori di A non sono distinti

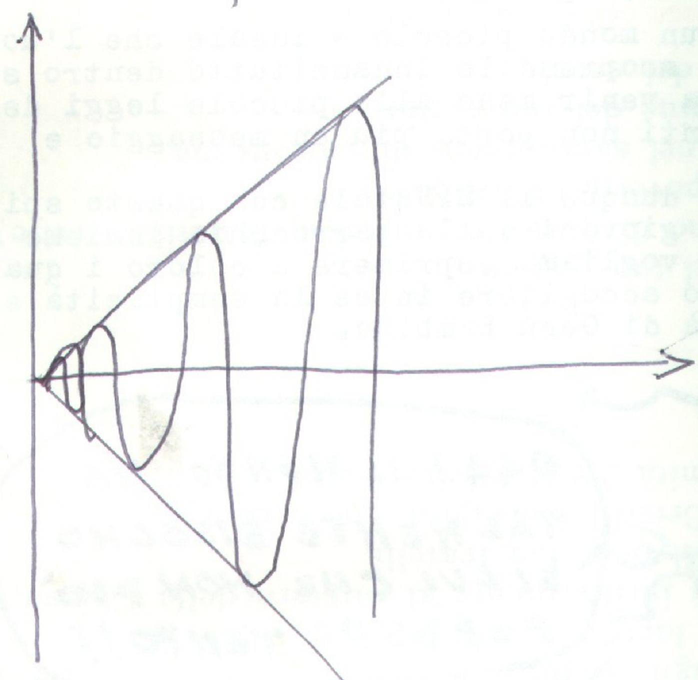
$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_i} \frac{R_{ik}}{(s-\lambda_i)^k} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_i} R_{ik}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_i t} = \Phi(t) = e^{At}$$

Osserviamo adesso che se la molteplicità delle radici del polinomio minimo, cioè m_i, chiamata molteplicità geometrica, è >1, le leggi temporali dei modi corrispondenti a valori di $k>1$ si modificano rispetto a quelle che abbiamo visto quando abbiamo parlato dei modi naturali. Infatti, quando $m_i>1$, la legge temporale dei modi aperiodici sarà $te^{\lambda_i t}$ e non $e^{\lambda_i t}$ mentre la legge temporale dei modi pseudoperiodici sarà $te^{\alpha_{ei}t}\sin\omega_{ei}t$ e non $e^{\alpha_{ei}t}\sin\omega_{ei}t$. In questo caso per λ_i reale le leggi temporali dei modi saranno



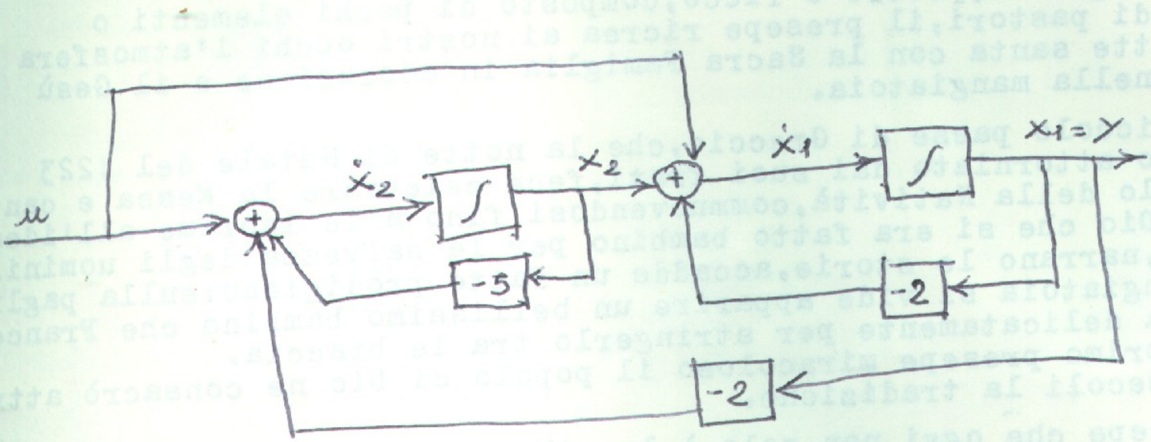
mentre, per λ_h complesso,





ESERCIZIO

Consideriamo il seguente sistema continuo



Le equazioni del sistema sono

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 5x_2 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Vogliamo calcolare la risposta indiciale facendo uso della trasformata di Laplace. Ricordiamo che la risposta indiciale è la risposta forzata ad un gradino di ampiezza unitaria. Infatti sappiamo che,

se $x_0 = 0$ $\quad Y(s) = W(s)\,U(s)$

Se l'ingresso è $1(t)$, il suo trasformato è $\frac{1}{s}$

$$Y(s) = \frac{W(s)}{s}$$

Dobbiamo calcolare $W(s)$

$$W(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ 2 & s+5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} s+5 & 1 \\ -2 & s+5 \end{pmatrix}}{(s+2)(s+5)+2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{s+6}{(s+2)(s+5)+2}$$

$$Y(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{s+6}{s\,(s^2+7s+12)} = \frac{s+6}{s(s+3)(s+4)} =$$

$$= \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+3} + \frac{R_3}{s+4}$$

$$R_1 = \lim_{s \to 0} \frac{s+6}{(s+3)(s+4)} = \frac{1}{2}$$

$$R_2 = \lim_{s \to -3} \frac{s+6}{s(s+4)} = -1$$

$$R_3 = \lim_{s \to -4} \frac{s+6}{s(s+3)} = \frac{1}{2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+3} + \frac{1}{2(s+4)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{-4t} - e^{-3t} + \frac{1}{2}$$

ESERCIZIO

Consideriamo il seguente sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

Determiniamo la risposta indiciale di questo sistema

$$W(s) = C(sI - A)^{-1} B =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix}}{s(s+2)+2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

$$Y(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{s+1}{s(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2} -$$

$$A = \lim_{s \to 0} \frac{s+1}{s^2+2s+2} = \frac{1}{2}$$

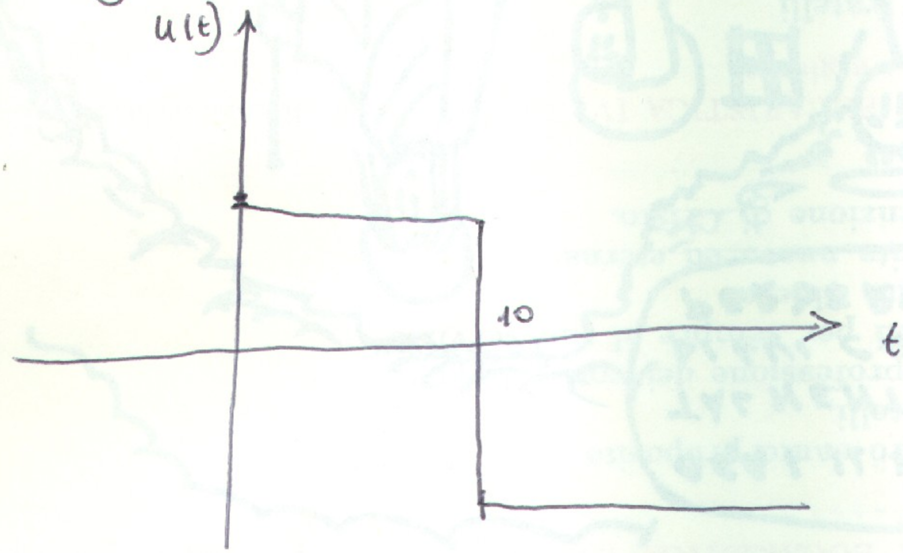
$$Y(s) = \frac{1}{2s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

Valutando per $s=1$ ed $s=-1$ $\quad B = -\frac{1}{2} \quad C = 0$

$$Y(s) = \frac{1}{\ldots} + \frac{\frac{1}{2}s}{\ldots}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-t} \cos t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin t$$

Vogliamo determinare adesso la risposta forzata al seguente segnale



$$u(t) = \underbrace{1(t)}_{u'} - \underbrace{2 \cdot 1(t-10)}_{u''}$$

Siccome il sistema è lineare possiamo trovare le risposte forzate ad u' ed u'' e poi ne facciamo la differenza. La risposta a u' è

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-t} \cos t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin t$$

La risposta a u'' è, nel dominio della s

$$Y(s) = 2 \frac{W(s)}{s} e^{-10s} = 2 e^{-10s} \left(\frac{1}{2s} - \frac{\frac{1}{2} s}{(s+1)^2 + 1} \right) =$$

$$= \frac{e^{-10s}}{s} - \frac{s e^{-10s}}{(s+1)^2 + 1}$$

Ora, $\mathcal{L}^{-1} \left[e^{-sT} F(s) \right] = 1(t-T) f(t-T)$

$$y(t) = 1(t-10) - 1(t-10)\left(\frac{1}{2}e^{-t-10}\cos(t-10) - \frac{1}{2}e^{-t-10}\sin(t-10)\right)$$

quindi la risposta complessiva è

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t}\cos t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin t - 1(t-10) + 1(t-10)\left(\frac{1}{2}e^{-t-10}\cos(t-10) - \frac{1}{2}e^{-t-10}\sin(t-$$

ANALISI DEI SISTEMI DISCRETI NEL DOMINIO DI Z

Un discorso analogo a quello fatto per i sistemi lineari e stazionari può essere fatto per i sistemi discreti lineari e stazionari ricorrendo alla trasformata z.

Sia assegnata una funzione reale di variabile discreta

$$f(k) = \{f(k)\} = f(0),\ f(1),\ f(2) \dots f(k) \dots$$

Alla $f(k)$ posso associare biunivocamente una funzione complessa di variabile complessa z, $F(z)$, definita nel seguente modo

$$F(z) = Z(f(k)) = f(0) + f(1)z^{-1} + \dots + f(k)z^{-k} + \dots$$

$$Z(f(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

$$f(k) = Z^{-1}(F(z)) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} z^{k-1} F(z)\, dz$$

dove Γ è una curva chiusa compresa nel dominio di definizione della $Z(f(k))$ e contenente l'origine. Si può far vedere che la $F(z)$ converge all'esterno del cerchio di raggio

$$\rho = \max \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|f(k)|}$$

Calcoliamo, ad esempio, $Z(\lambda^k)$

$$f(k) = \{\lambda^k\} = \{1, \lambda, \lambda^2, \dots \lambda^k, \dots\}$$

$$Z(\lambda^k) = F(z) = 1 + \lambda z^{-1} + \lambda^2 z^{-2} + \dots + \lambda^k z^{-k} + \dots$$

Essa è una serie geometrica di ragione λz^{-1}. Quindi

$$F(z) = Z(\lambda^{k}) = \frac{1}{1-\lambda z^{-1}}$$

questo, però, si ha solo se $|z| > |\lambda|$. Infatti la somma parziale è

$$S_n = \frac{1-\lambda^{n} z^{-n}}{1-\lambda z^{-1}} = \frac{1-\left(\frac{\lambda}{z}\right)^{n}}{1-\frac{\lambda}{z}}$$ per cui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{\lambda}{z}\right)^{n}}{1-\frac{\lambda}{z}} = \frac{1}{1-\lambda z^{-1}}$$ solo se $\left|\frac{\lambda}{z}\right| < 1$

Come caso particolare possiamo porre $\lambda = 1$ così

$$f(k) = 1(k)$$

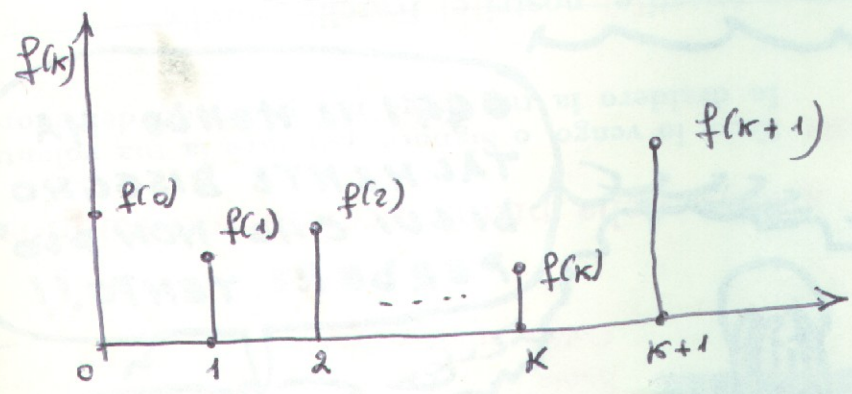
allora $Z(1(k)) = \dfrac{z}{z-1}$

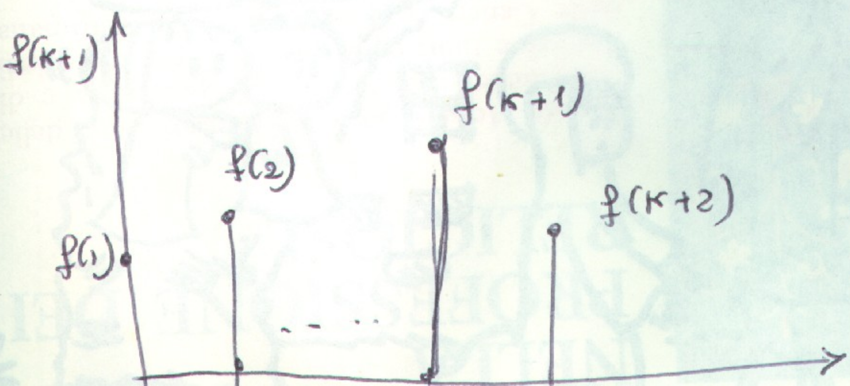
TEOREMA DELL'ANTICIPO

$$Z(f(k+1)) = z\,F(z) - z\,f(0)$$

Infatti:

$Z($





cioè la $f(k+1)$ è slittata di 1 rispetto alla $f(k)$

$$Z(f(k+1)) = f(1) + f(2)z^{-1} + \dots + f(k+1)z^{-k} + f(k+2)z^{-k-1} + \dots$$

$$Z(f(k)) = f(0) + f(1)z^{-1} + \dots + f(k)z^{-k} + \dots = F(z)$$

Se moltiplico la 2^a per z e faccio la differenza otte

$$Z(f(k+1)) - zF(z) = f(1) + \cancel{f(2)z^{-1}} + \dots + \cancel{f(k+1)z^{-k}} + \dots$$
$$- z f(0) - \cancel{f(1)} - \dots - \cancel{f(k)z^{-k+1}}$$

$$Z(f(k+1)) - zF(z) = -z f(0)$$ c.v.d.

TEOREMA DEL RITARDO

$$Z(f(k-1)) = \frac{F(z)}{z}$$

Inoltre
$$Z(-k f(k)) = z \frac{d}{dz} F(z)$$

Prima ho trovato che $\lambda^k \longrightarrow \frac{z}{z-\lambda}$. Voglio determinare adesso $Z(k\lambda^k)$. Avrò che siccome

$$Z(k f(k)) = -z \frac{d}{dz} F(z)$$

allora

$$Z(k\lambda^k) = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{z-\lambda} =$$

$$= -z \frac{(z-\lambda) - z}{(z-\lambda)^2} = \frac{z\lambda}{(z-\lambda)^2}$$

Dimostriamo adesso che

$$z \frac{d}{dz} F(z) = Z(-k\, f(k))$$

Infatti:

$$z\frac{d}{dz}F(z) = z\frac{d}{dz}\left(f(0)+f(1)z^{-1}+\dots+f(k)z^{-k}+\dots\right) =$$

$$= z\left(-f(1)z^{-2}+\dots+k\, f(k)\, z^{-k-1}+\dots\right)=$$

$$= -\left(0\cdot f(0) + 1\cdot f(1)\, z^{-1} + 2\, f(2)\, z^{-2} + \dots + k\, f(k)\, z^{-k} + \dots\right) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} k\, f(k)\, z^{-k} = Z(-k\, f(k))$$

TEOREMA DI CONVOLUZIONE

$$Z\left(\sum_{h=0}^{k} f(h)\, g(k-h)\right) = F(z)\, G(z)$$

Infatti.

$$F(z)G(z) = \left(f(0)+f(1)z^{-1}+\dots+f(k)z^{-k}+\dots\right)\left(g(0)+g(1)z^{-1}+\dots+g(k)z^{-k}+\dots\right)=$$

$$= f(0)g(0) + \left(f(0)g(1)+f(1)g(0)\right)z^{-1} + \left(f(0)g(2)+f(1)g(1)+f(2)g(0)\right)z^{-2} +$$

$$+\dots+\left(f(0)g(k)+f(1)g(k-1)+\dots+f(k)g(0)\right)z^{-k}+\dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{h=0}^{k} f(h)\, g(k-h)\right) z^{-k}$$

TEOREMA DEL VALORE INIZIALE E FINALE

Supponiamo che $f(k)$ sia convergente ossia esista

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = f(\infty)$$

Allora

$$f(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)\, F(z)$$

Sia $g(k) = f(k) - f(k-1)$. Trasformando si ha

$$G(z) = F(z) - \frac{F(z)}{z}$$

1

$$G(z) = \frac{z-1}{z} F(z)$$

$$\lim_{z \to 1} G(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} F(z) = \lim_{z \to 1} (z-1) F(z) = G(1)$$

ma

$$G(1) = g(0) + g(1) + \ldots + g(k) + \ldots =$$

$$= f(0) + f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + \ldots + f(k) - f(k-1) + \ldots + f(\infty) =$$

$$= f(\infty).$$

c.v.d.

Vediamo alcune trasformate

$$\delta(k) \underset{Z^{-1}}{\overset{Z}{\longleftrightarrow}} 1 \quad ; \quad 1(k) \underset{Z^{-1}}{\overset{Z}{\longleftrightarrow}} \frac{z}{z-1} \quad ;$$

$$\lambda^k \underset{Z^{-1}}{\overset{Z}{\longleftrightarrow}} \frac{z}{z-\lambda} \quad ;$$

Si può dimostrare che

$$Z\left(\frac{k^{(n)} \lambda^{k-n}}{n!}\right) = \frac{z}{(z-\lambda)^{n+1}}$$

con $k^{(n)} = k(k-1) \ldots (k-n+1)$ polinomio fattoriale di grado n

Se λ è complesso, $\lambda = \rho e^{\pm j\vartheta} = \alpha \pm j\omega$

$$Z(\rho^k e^{j\vartheta k}) = \frac{z}{z-(\alpha+j\omega)} \quad ; \quad Z(\rho^k e^{-j\vartheta k}) = \frac{z}{z-(\alpha-j\omega)}$$

$$Z(\rho^k e^{j\vartheta k}) + Z(\rho^k e^{-j\vartheta k}) = Z\left[2\rho^k \left(\frac{e^{j\vartheta k} + e^{-j\vartheta k}}{2}\right)\right] =$$

$$= Z\left[2\rho^k \cos\vartheta k\right] = \frac{z}{z-(\alpha+j\omega)} + \frac{z}{z-(\alpha-j\omega)} =$$

$$= \frac{z(z-\alpha+j\omega+z-\alpha-j\omega)}{(z-\alpha)^2+\omega^2} = \frac{2z(z-\alpha)}{(z-\alpha)^2+\omega^2}$$

quindi

$$\mathcal{Z}(\rho^k \cos\theta k) = z\,\frac{z-\alpha}{(z-\alpha)^2+\omega^2}$$

mentre

$$\mathcal{Z}(\rho^k \sin\theta k) = z\,\frac{\omega}{(z-\alpha)^2+\omega^2}$$

per cui

$$a\rho^k\cos\theta k + \frac{b+\alpha a}{\omega}\rho^k \sin\theta k \underset{\mathcal{Z}^{-1}}{\overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow}} z\,\frac{az+b}{(z-\alpha)^2+\omega^2}$$

Infatti

$$\mathcal{Z}(a\rho^k\cos\theta k) = a z\,\frac{z-\alpha}{(z-\alpha)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{Z}\left(\frac{b+\alpha a}{\omega}\rho^k\sin\theta k\right) = \frac{b+\alpha a}{\omega}\, z\,\frac{\omega}{(z-\alpha)^2+\omega^2}$$

$$\frac{a z(z-\alpha)}{(z-\alpha)^2+\omega^2} + \frac{(b+\alpha a)z}{(z-\alpha)^2+\omega^2} = \frac{z(az-\alpha a+b+\alpha a)}{(z-\alpha)^2+\omega^2} =$$

$$= \frac{z(az+b)}{(z-\alpha)^2+\omega^2}$$

Supponiamo adesso di avere una funzione $F(z)=\frac{Y(z)}{P(z)}$. Vogliamo determinare la sua antitrasformata $\mathcal{Z}^{-1}$. A tale scopo bisogna decomporre in fratti semplici $F(z)$. Se indichiamo con λ_i, $i=1\dots n$, le radici di $P(z)$, avremo

$$F(z) = \frac{A}{z-\lambda_1} + \frac{B}{z-\lambda_2} + \dots$$

Quando poi siamo giunti a questo sviluppo è bene moltiplicare e dividere per z, in modo tale da arrivare a termini del tipo $\frac{z}{z-\lambda}$. Ad esempio

$$\frac{z+2}{(z+1)(z+3)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+3} = \frac{1}{2(z+1)} + \frac{1}{2(z+3)}$$

moltiplicando e dividendo per z

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{2(z+1)} + \frac{z}{2(z+3)}\right) \Rightarrow Z^{-1}\left(z^{-1}\left(\frac{z}{2(z+1)} + \frac{z}{2(z+3)}\right)\right)$$

Ma $\quad z^{-1}F(z) \longrightarrow f(k-1)$

allora

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{2(z+1)} + \frac{z}{2(z+3)}\right) = \frac{1}{2}\lambda_1^k + \frac{1}{2}\lambda_2^k = \frac{1}{2}(-1)^k + \frac{1}{2}(-3)^k$$

$$Z^{-1}\left(z^{-1}F(z)\right) = \frac{1}{2}(-1)^{k-1} + \frac{1}{2}(-3)^{k-1}$$

A volte, quando non si conoscono i poli di $F(z)$ si segue un'altra strada. Se capita che

$$\lim_{k \to \infty} f(k) = cost$$

da un punto di vista pratico ci possiamo accontentare solo di un numero finito di valori di $f(k)$. Infatti, dopo un po' di tempo la $f(k)$ diventa costante. Allora

D.E.

$$F(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

Ricordiamo adesso che per definizione

$$F(z) = f(0) + f(1) z^{-1} + \dots + f(k) z^{-k} + \dots$$

quindi

$$b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m} = (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m})(f(0) + f(1) z^{-1} + \dots) =$$

$$= a_0 f(0) + (a_1 f(0) + f(1) a_0) z^{-1} + (\dots + (a_0 f(m) + a_1 f(m-1) + \dots + a_m f(0)) z^{-m} + \dots$$

$$+ a_0 f(m+1) z^{-(m+1)} + a_1 f(m) z^{-(m+1)} + \dots$$

Uguagliando i coefficienti

$$b_0 = a_0 f(0)$$

$$b_1 = a_1 f(0) + a_0 f(1)$$

$$\dots$$

$$b_m = a_0 f(m) + a_1 f(m-1) + \dots + a_m f(0)$$

$$0 = a_0 f(m+1) + a_1 f(m) + \dots + a_{m+1} f(0)$$

$$0 = \dots$$

Avremo allora un sistema triangolare

$$f(0) = \frac{b_0}{a_0}$$

$$f(1) = \frac{b_1 - a_1 f(0)}{a_0}$$

$$\vdots$$

Riusciremo, in questo modo, a determinare un certo numero finito di $f(k)$ che è proprio l'anti-trasformata per un numero finito di valori.

Consideriamo adesso il sistema lineare stazionario discreto

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k)$$

$$y(k) = C x(k) + D u(k)$$

Trasformando ottengo

$$z X(z) - z x_0 = A X(z) + B U(z)$$

$$Y(z) = C X(z) + D U(z)$$

da cui

$$(zI-A)X(z) = BU(z) + zx_0$$

$$\Downarrow$$

$$X(z) = z(zI-A)^{-1}x_0 + (zI-A)^{-1}BU(z)$$

$$Y(z) = zC(zI-A)^{-1}x_0 + (C(zI-A)^{-1}B+D)U(z)$$

cioè

$$\begin{cases} X(z) = \Phi(z)x_0 + H(z)U(z) \\ Y(z) = \Psi(z)x_0 + W(z)U(z) \end{cases}$$

dove

$$\Phi(z) = z(zI-A)^{-1}$$

$$H(z) = (zI-A)^{-1}B$$

$$\Psi(z) = zC(zI-A)^{-1}$$

$$W(z) = C(zI-A)^{-1}B + D$$

La matrice $W(z)$ si chiama matrice di trasferimento del sistema. Se poniamo $x_0 = 0$ abbiamo

$$Y(z) = W(z)U(z)$$

quindi possiamo calcolare subito l'evoluzione forzata del sistema. Se esiste il limite

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = y(\infty)$$

applicando il teorema del valore finale

$$Y(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) =$$

$$= \lim_{z\to 1}(z-1)W(z)U(z) = W(1)\lim_{z\to 1}(z-1)U(z) =$$

$$= W(1)\,u(\infty)$$

Avremo allora che $W(1)$ è la matrice dei guadagni statici. Infatti

$$W(1) = C(I-A)^{-1}B + D = G$$

Consideriamo adesso $u(k) = u_0 1(k)$. Avremo che

$$Y(z) = W(z)\, U(z)$$

$$U(z) = Z\left(u_0 1(k)\right) = u_0 \frac{z}{z-1} \Rightarrow Y(z) = \frac{W(z)\, u_0\, z}{z-1}$$

Occupiamoci, adesso, dell'antitrasformata di $\Phi(z)$

Consideriamo prima il caso in cui la matrice A abbia autovalori distinti.

$$\Phi(z) = z(zI-A)^{-1} = \sum_{i=1}^{n} R_i \frac{z}{z-\lambda_i}$$

con $R_i = \lim_{z \to \lambda_i} (z-\lambda_i)(zI-A)^{-1}$

Antitrasformando

$$\Phi(k) = A^k = \sum_{i=1}^{n} R_i \lambda_i^k$$

Esplicitiamo ora gli autovalori reali e complessi

$$\Phi(k) = A^k = \sum_{i=1}^{n} R_i \lambda_i^k + \sum_{h=1}^{\nu} 2 \rho_h^k \left(R_{ha} \cos \theta_h k - R_{hb} \sin \theta_h k\right)$$

Questo lo si vede analogamente al caso continuo.

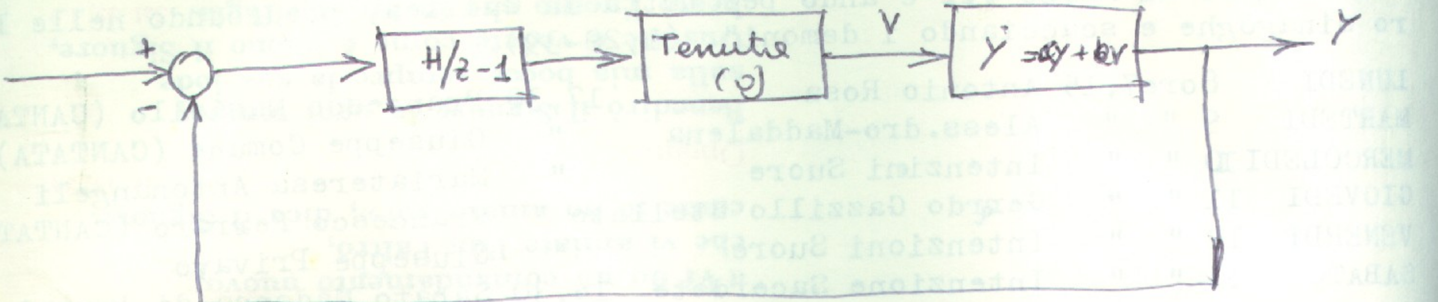
Se, invece, gli autovalori non sono distinti

$$\Phi(z) = z(zI-A)^{-1} = z\left(\frac{R_{11}}{z-\lambda_1} + \frac{R_{12}}{(z-\lambda_1)^2} + \dots\right)$$

e antitrasformando otteremo

$$\Phi(k) = A^k = R_{11} \lambda_1^k + R_{12} \frac{k^{(1)} \lambda^{(k-1)}}{1!} + \dots$$

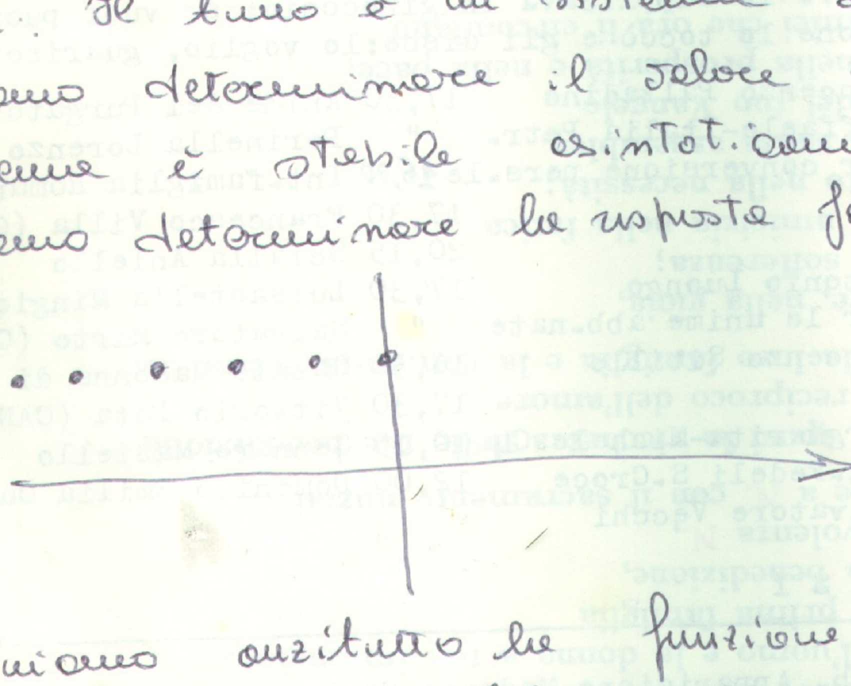
ESERCIZIO



$\frac{H}{z-1}$ è la funzione di trasferimento di un sistema a tempo discreto mentre $\dot{y} = ay + av$ è un sistema a tempo continuo sollecitato da ingressi a tratti costanti. Il tutto è un sistema a dati campionati.

1) Vogliamo determinare il valore di H per cui il sistema è stabile asintoticamente.

2) Vogliamo determinare la risposta forzata al segnale



Determiniamo anzitutto la funzione di trasferimento. Per fare questo determiniamo il modello discreto del sistema continuo sollecitato da un ingresso costante a tratti.

Il sistema continuo è descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,v(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

Il suo modello discreto è

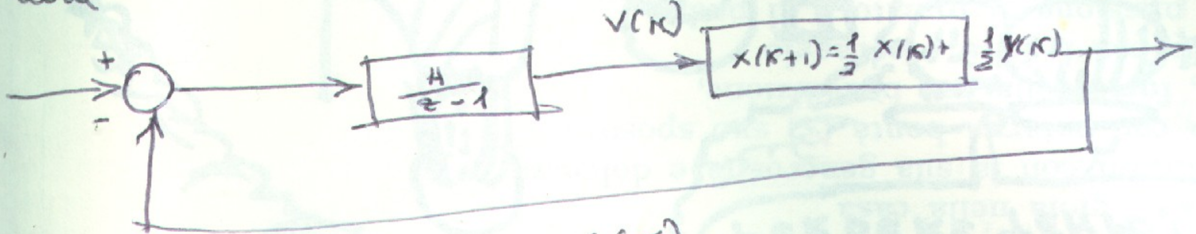
$$\dots x(k) + b_1 v(k)$$

con $a_d = e^{aT}$, $b_d = a^{-1}(e^{aT}-1)\,b$

Se pongo $T = 1$ sec , $a = \log\frac{1}{2}$ avremo

$$a_d = e^{\log\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \quad , \quad b_d = \frac{1}{\log\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-1\right)\log\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Allora

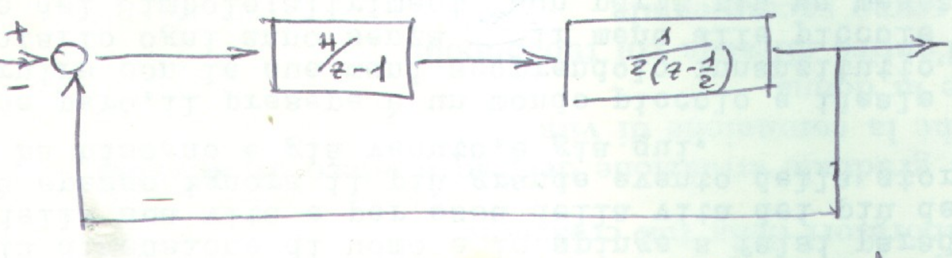


$y(k) = x(k)$

Determiniamo la funzione di trasferimento del sistema discreto

$$W(z) = c(zI - a)^{-1}b + d =$$

$$= \left(z-\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)} =$$



Siccome in questo caso l' H di controreazione vale 1 avremo che

$$W(z)_{\text{compl.}} = \frac{G}{1+G} =$$

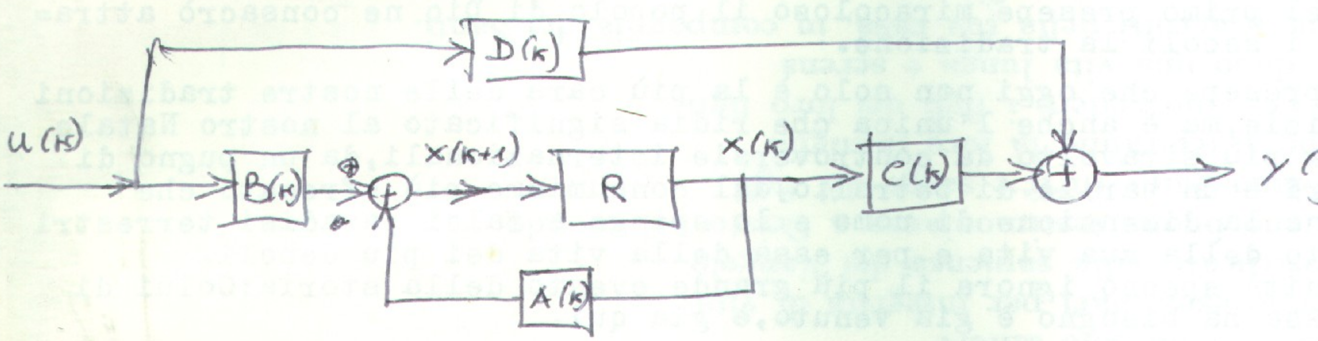
$$= \frac{\dfrac{1}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)}\,\dfrac{H}{z-1}}{1 + \dfrac{H}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)}}$$

AMPLIFICATORI OPERAZIONALI

Affrontiamo adesso la realizzazione dei sistemi a stato vettore lineari. Vediamo prima quelli discreti. Essi sono descritti dalle seguenti equazioni

$$x(k+1) = A(k)\,x(k) + B(k)\,u(k)$$
$$y(k) = C(k)\,x(k) + D(k)\,u(k)$$

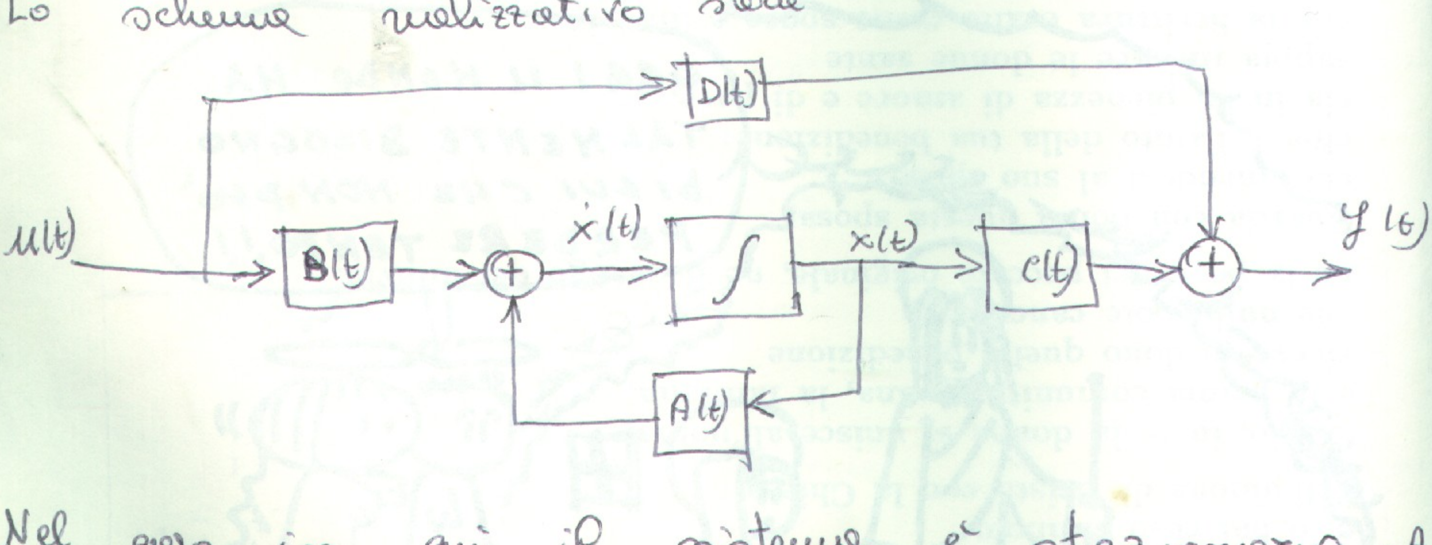
Lo schema realizzativo sarà allora il seguente



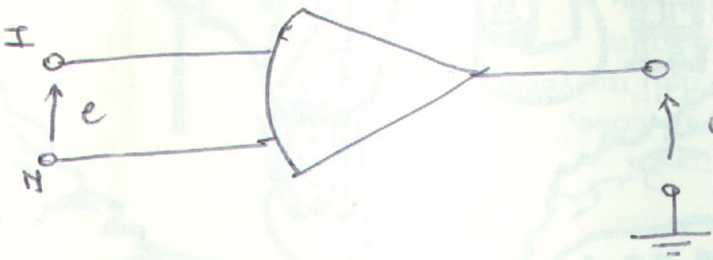
Nel caso in cui il sistema è continuo le equazioni sono queste

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)$$
$$y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t)$$

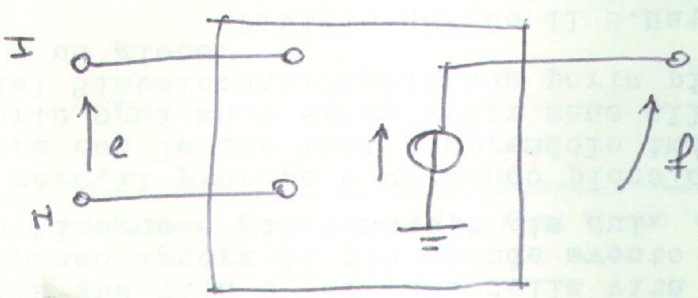
Lo schema realizzativo sarà



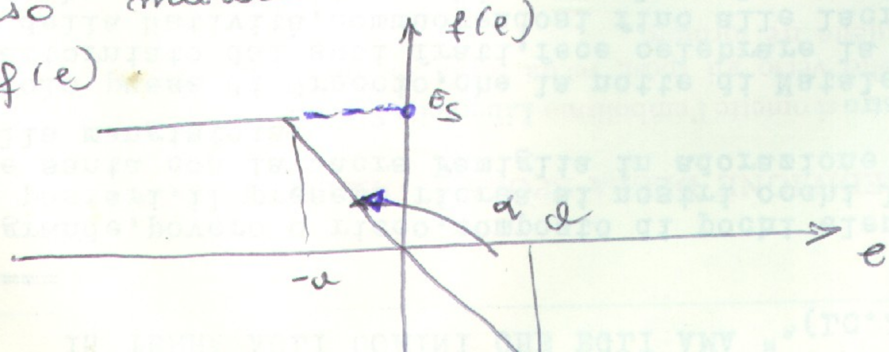
Nel caso in cui il sistema è stazionario, A, B, C e D diventano delle costanti per cui dovremo operare una moltiplicazione di uno scalare per una funzione. Allora, a questo scopo, nell'ipotesi di stazionarietà, si usano gli amplificatori operazionali. L'amplificatore operazionale è un circuito elettronico che si indica in questo modo



Esso è caratterizzato da due morsetti I ed N. I è un morsetto invertente, N un morsetto non invertente. L'amplificatore operazionale è equivalente a questo circuito elettrico



Come si può vedere, l'impedenza di ingresso è infinita, mentre l'impedenza di uscita è nulla. Mentre in ingresso la tensione è la differenza tra la tensione di I e quella di N, in uscita la tensione è essa messa. Vediamo qual è l'andamento di $f(e)$.

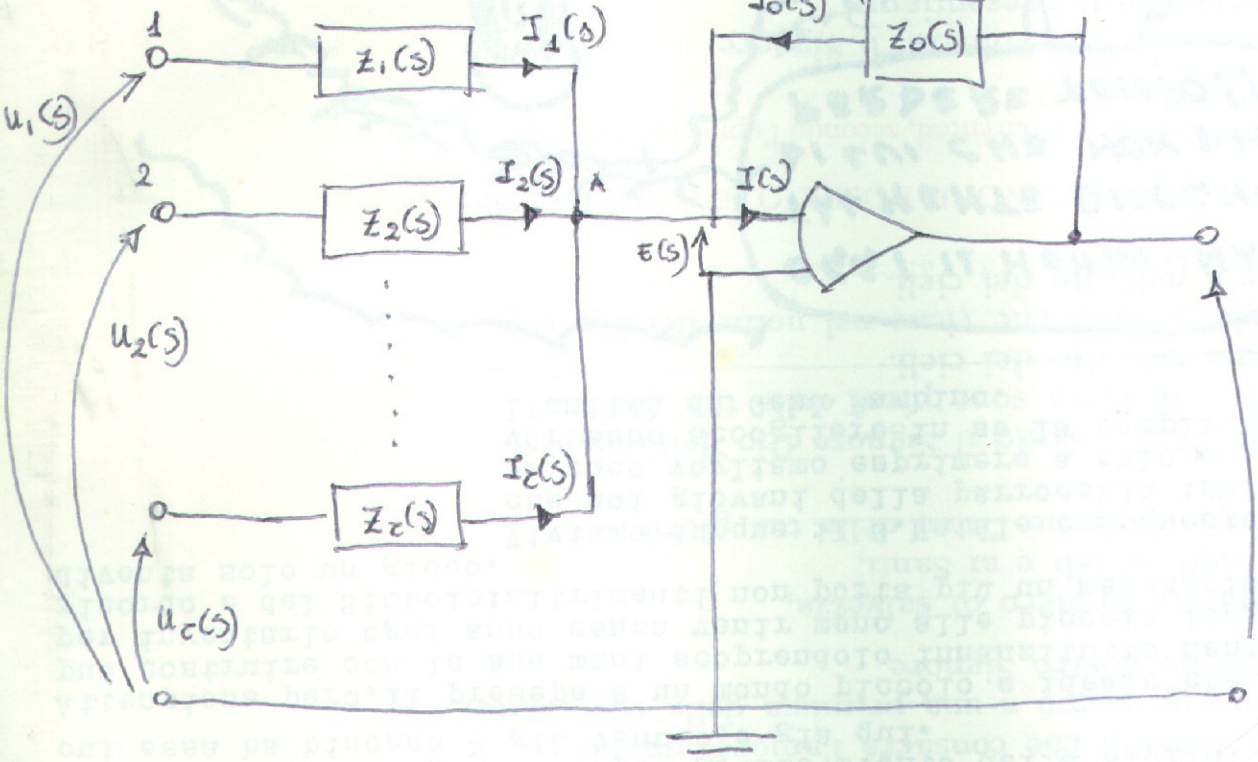


Detto K il guadagno

$$y = f(e) = -Ke$$

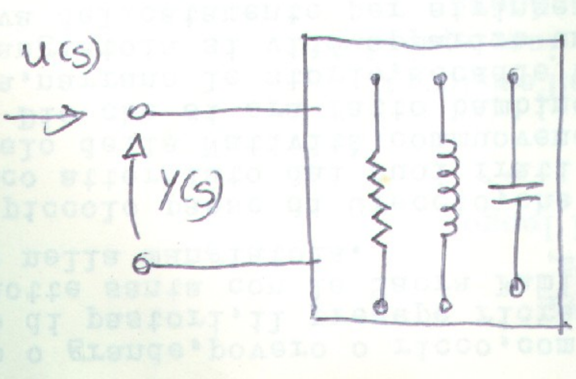
per $|y| < E_s$. Se invece, $|y| > E_s$ allora $y = f(e) = E_s$ cioè il circuito va in saturazione. Osservo che $-K = tg\,\alpha$

Un amplificatore operazionale lo posso inserire in uno schema di questo tipo



dove le $Z_i(s)$ sono le impedenze operazionali.

Precisamente si dice impedenza operazionale di un bipolo passivo in figura



la funzione di trasferimento

$$W(s) = Z(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

assumendo come ingresso la corrente e come uscita la tensione.

Supponendo l'amplificatore ideale

$$E(s) = 0 \quad , \quad I(s) = 0$$

allora

$$I_0(s) + I_1(s) + I_2(s) + \dots + I_r(s) = I(s) = 0 \qquad (I)$$

proprio perchè l'amplificatore ha impedenza di ingresso infinita. In questa ipotesi $K \to -\infty$, la tensione di ingresso $E(s) = 0$ proprio perchè se $K \to -\infty$ l'intervallo $(-a, a)$ è piccolissimo.

Tenendo presente questo

$$I_i(s) = \frac{U_i(s)}{Z_i(s)} \qquad i = 1 \dots r$$

Infatti, se $E(s) = 0$, il punto A è al potenziale di terra

Sarà anche $I_0(s) = \dfrac{Y(s)}{Z_0(s)}$

la (I) diventa

$$\frac{Y(s)}{Z_0(s)} + \frac{U_1(s)}{Z_1(s)} + \dots + \frac{U_r(s)}{Z_r(s)} = 0$$

$$Y(s) = -\frac{Z_0(s)}{Z_1(s)} U_1(s) + \dots - \frac{Z_0(s)}{Z_r(s)} U_r(s)$$

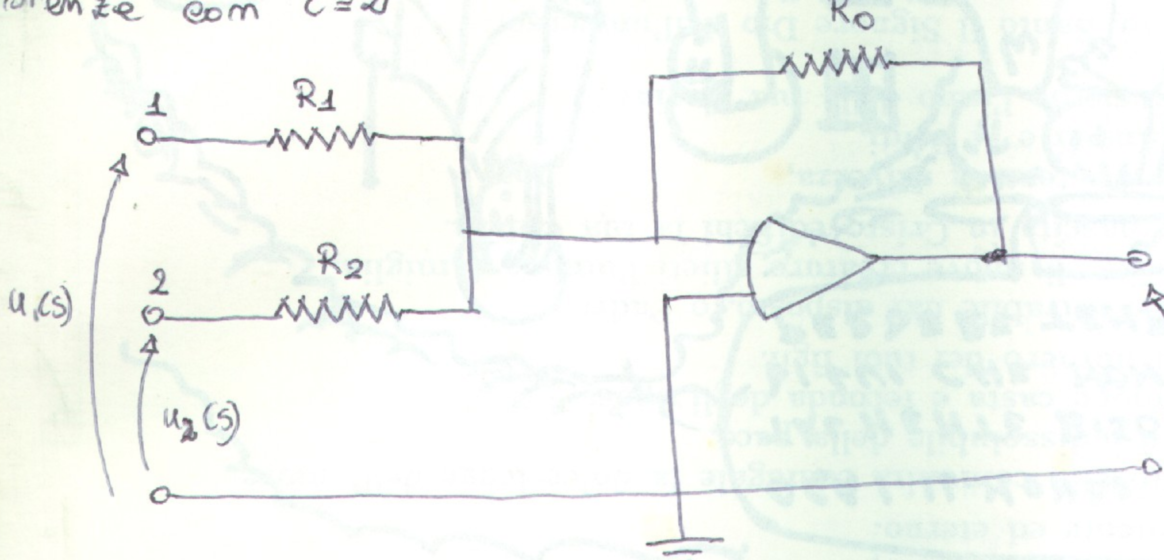
E questo è proprio il legame ingresso-uscita

$$Y(s) = W(s)\,U(s)$$

dove $W(s)$ è la matrice di trasferimento del circuito ed è

$$W(s) = \left(-\frac{Z_0(s)}{Z_1(s)} \quad -\frac{Z_0(s)}{Z_2(s)} \quad \dots \dots \quad \frac{Z_0(s)}{Z_r(s)} \right)$$

Consideriamo il caso in cui tutte le impedenze siano resistenze con $r = 2$



$$Y(s) = -\frac{R_0}{R_1} u_1(s) - \frac{R_0}{R_2} u_2(s)$$

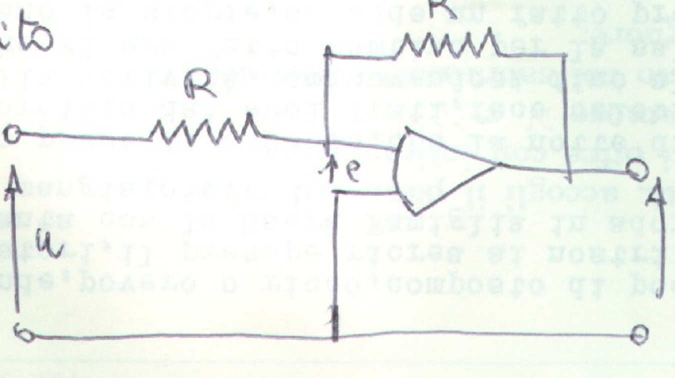
$$y(t) = -\frac{R_0}{R_1} u_1(t) - \frac{R_0}{R_2} u_2(t) \Rightarrow y(t) = -a_1 u_1(t) - a_2 u_2(t)$$

cioè l'uscita è combinazione lineare degli ingressi

Se $a_1 = a_2$, $R_1 = R_2 = R_0$

$$y(t) = -a\left(u_1(t) + u_2(t)\right)$$

e si chiama amplificatore sommatore. Volendo evitare il cambiamento di segno si può usare il seguente circuito



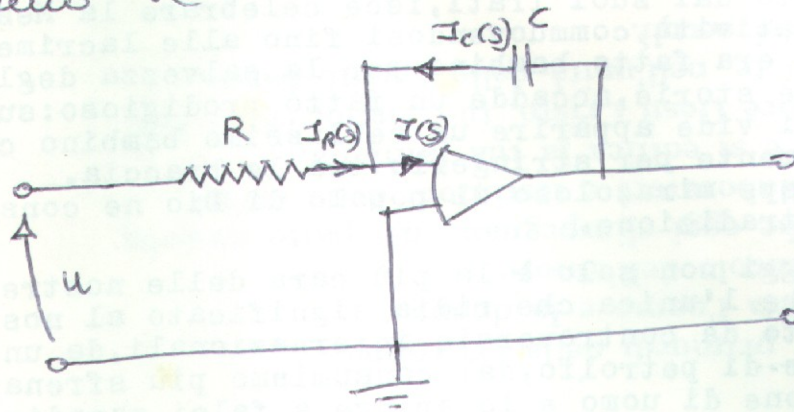
$y(t) = -u(t)$

Infatti:

$$\frac{u}{R} + \frac{y}{R} = 0 \implies y(t) = -u(t)$$

AMPLIFICATORE INTEGRATORE

Consideriamo il circuito



Osservo che l'impedenza operazionale di C è

$$Z_0 = \frac{1}{sC}$$

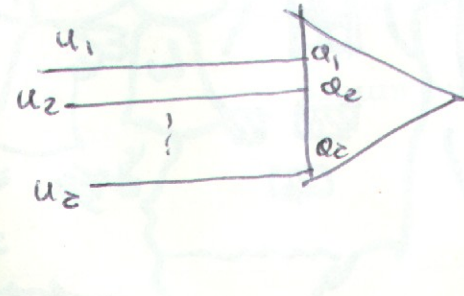
Allora $Y(s) = -\frac{Z_0}{Z_1} U(s) = -\frac{1}{RCs} U(s) = W(s)\, U(s)$

Passando nel dominio del tempo

$$Y(s) = -\frac{1}{RCs} U(s) \longrightarrow y(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t u(t)\,dt + y_0$$

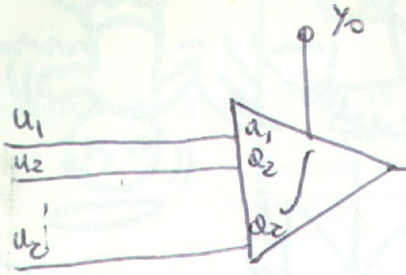
Allora, a meno della costante y_0, con questo circuito faccio l'integrale di $u(t)$ moltiplicato per la costante negativa $-\frac{1}{RC}$.

Mentre, in generale, il sommatore si indica in questo modo



$$y = -a_1 u_1 - a_2 u_2 + \dots - a_z u$$

l'integratore si indica in quest'altro modo



$$\rightarrow y = y_0 - a_1\int_0^t u_1\,dt + \dots - a_r\int_0^t u_r\,dt$$

ESEMPIO

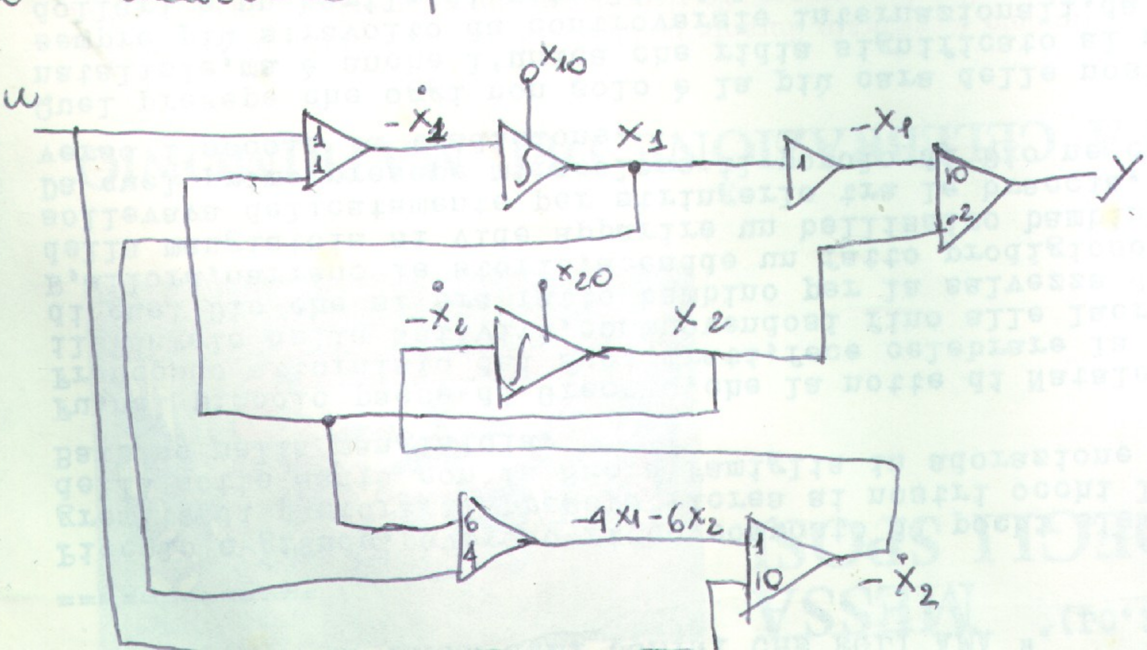
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} u$$

$$y = (10 \quad -2)\, x$$

$$\Downarrow$$

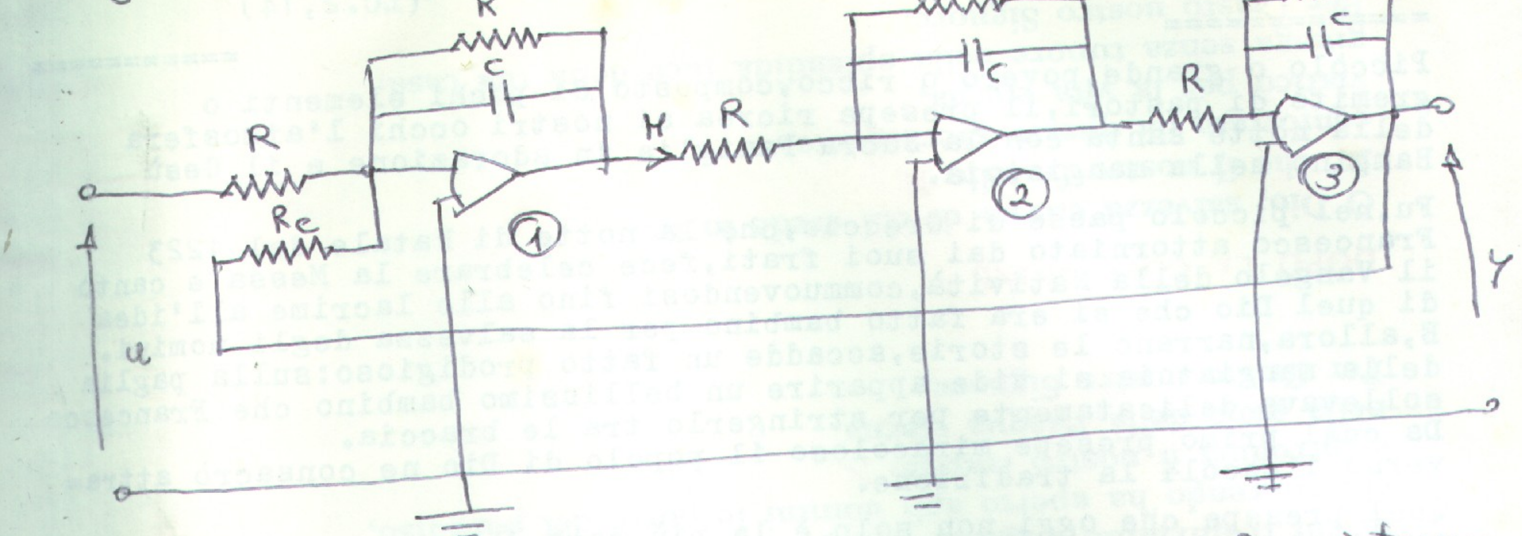
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - 6x_2 + 10u \\ y = 10x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Per realizzare questo sistema faccio



ESERCIZIO

Assegniamo circuitalmente il seguente sistema

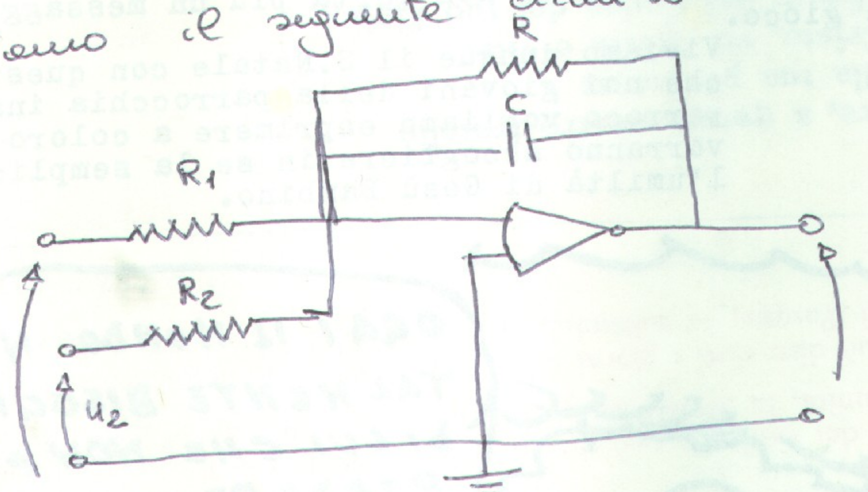


1) Determiniamo il modello matematico del sistema

2) Determiniamo il valore di R_c per cui il sistema è stabile

3) Risposta al gradino.

Consideriamo il seguente circuito



$$Y(s) = -\frac{Z_0}{R_1} u_1(s) - \frac{Z_0}{R_2} u_2(s)$$

$$Z_0 = \frac{R\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}} = \frac{\frac{R}{sC}}{\frac{sRC+1}{sC}} = \frac{R}{s\tau+1}$$

$$Y(s) = -\frac{R}{R_1}\frac{u_1(s)}{s\tau+1} - \frac{R}{R_2}\frac{u_2(s)}{s\tau+1} =$$

$$= \left(-\frac{R}{R_1}\frac{1}{s\tau+1} \quad -\frac{R}{R_2}\frac{1}{s\tau+1} \right) \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix}$$

$$W(s) = \left(-\frac{R}{R_1}\frac{1}{s\tau+1} \quad -\frac{R}{R_2}\frac{1}{s\tau+1} \right)$$

Nel caso dei sistemi 2 e 3 $R_1 = R$ mentre R_2 non c'è per cui la matrice di trasferimento dei sistemi 2 e 3 è

$$W(s) = -\frac{1}{s\tau+1}$$

Vediamo la matrice di trasferimento del sistema 1

Il segnale M che arriva è

$$M(s) = \left(-\frac{1}{1+s\tau}u_1 - \frac{R}{R_c}\frac{1}{1+s\tau}u_2 \right)$$

Nel nostro caso $u_1 = u$, $u_2 = y$

$$M(s) = -\frac{1}{1+s\tau}\left(u + \frac{R}{R_c}y(s) \right)$$

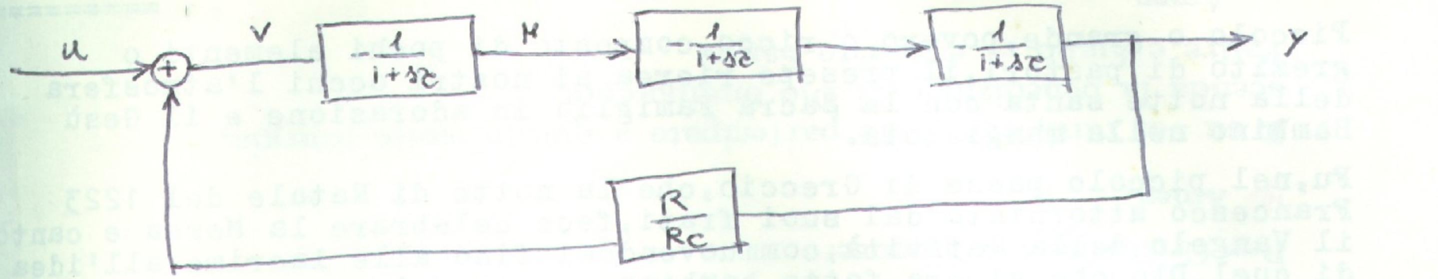
Se, allora, considero come ingresso

$$v = u + \frac{R}{R_c}y(s)$$

la matrice di trasferimento è

$$W(s) = -\frac{1}{s\tau+1}$$

Lo schema complessivo serie



calcoliamo allora la funzione di transizione totale

$$G = -\frac{1}{(1+s\tau)^3}, \quad K = \frac{R}{R_c}$$

$$W(s)_{tot} = \frac{G}{1-G\cdot K} = \frac{-\frac{1}{(1+s\tau)^3}}{1+\frac{K}{(1+s\tau)^3}} = -\frac{1}{(1+s\tau)^3+K}$$

$\forall$ R_c il guadagno è sempre <0

2) Vogliamo vedere per quali valori di K il sistema è asintoticamente stabile. Dobbiamo analizzare il denominatore della funzione di trasferimento che coincide con il polinomio minimo. Applico Routh

$$1 + s^3\tau^3 + 3s\tau + 3s^2\tau^2 + K = 0$$

1	τ^3	3τ	0
2	$3\tau^2$	$K+1$	0
3	$8\tau^3 - K\tau^3$	0	
4	$K+1$		

Affinchè il sistema sia asintoticamente stabile deve essere

$$8\tau^3 - k\tau^3 > 0 \qquad \begin{cases} k+1>0 \\ k<8 \\ k>-1 \end{cases} \qquad k = \frac{R}{R_c} \quad \text{sempre} > 0$$

$$\frac{R}{R_c} < 8 \quad , \quad R_c > \frac{R}{8}$$